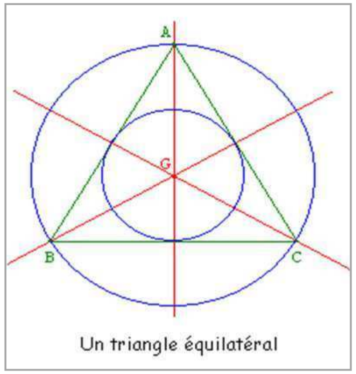
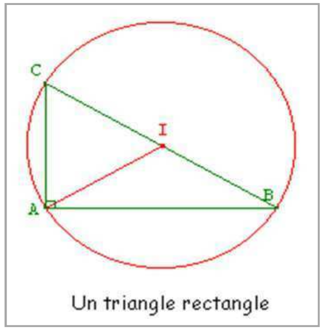
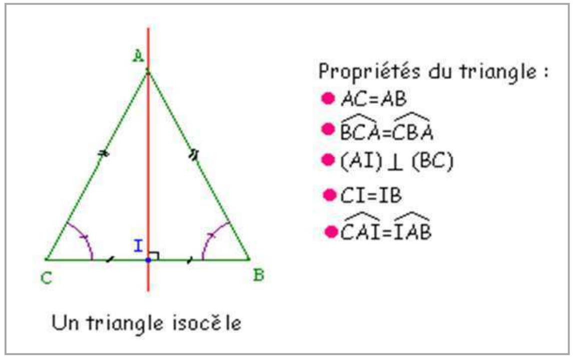


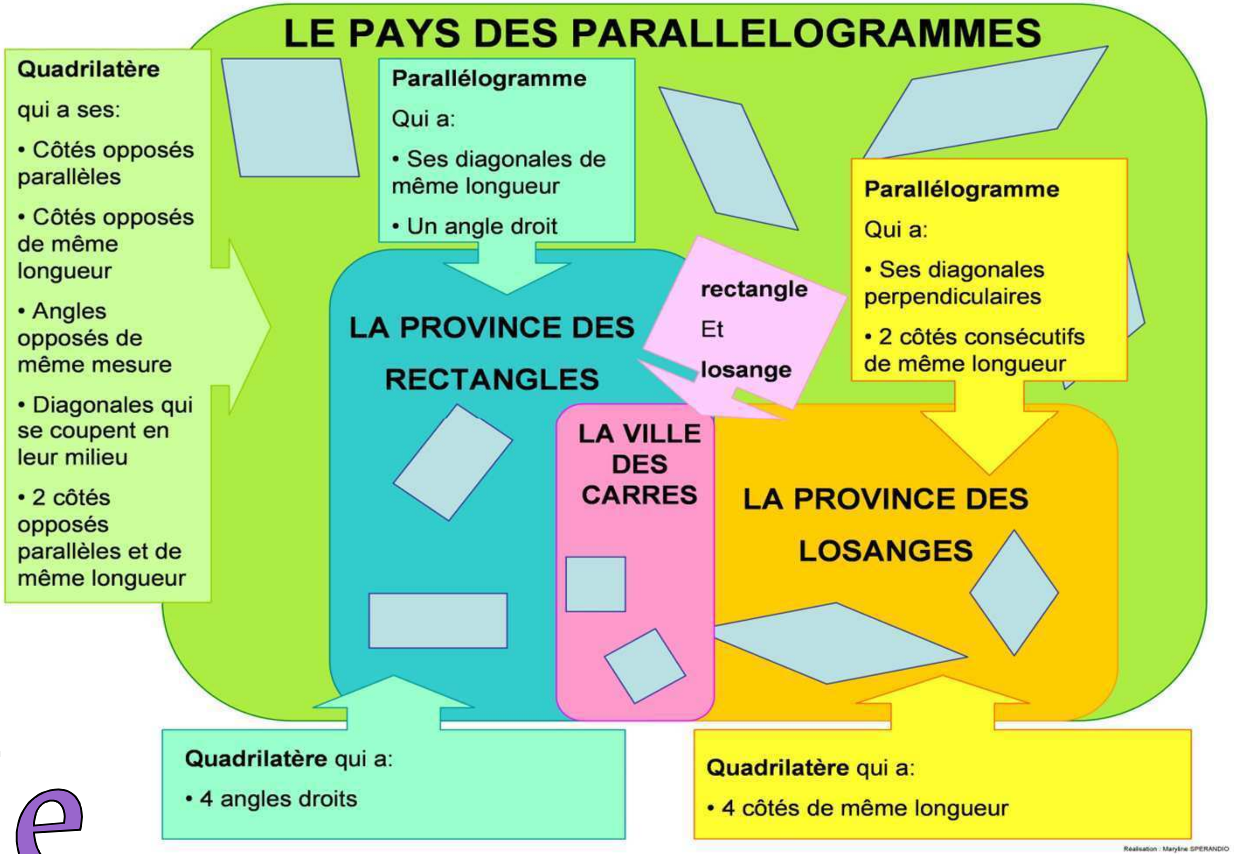
Un triangle équilatéral



Un triangle rectangle

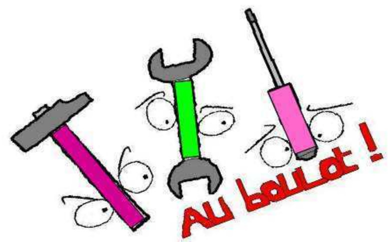


Un triangle isocèle



Géométrie

Eléments Usuels



ELEMENTS DE GEOMETRIE, NOTATIONS ET DEFINITIONS

Géométrie plane : géométrie dans le plan.
Plan : surface infinie, symbolisée par la feuille de papier (limitée à ses bords).

Point Lieu (ni longueur ni épaisseur), nommé par une majuscule, représenté par une croix ou une intersection de droites.

Exemple :

x A

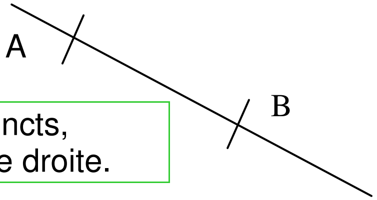
x B

x C

On utilise : × Mais pas : ● ■

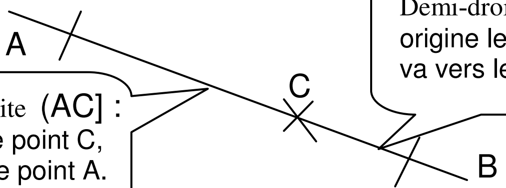
Points alignés : Des points sont alignés s'ils sont sur une même droite.

Droite (AB) Infinité de points alignés. On en trace une partie à la règle. Elle est illimitée, on peut prolonger son dessin si nécessaire.



Par deux points distincts, il ne passe qu'une seule droite.

Demi-droites (AC] et [CB)



Demi-droite [CB) : origine le point C, va vers le point B.

Demi-droite [AC) : origine le point C, va vers le point A.

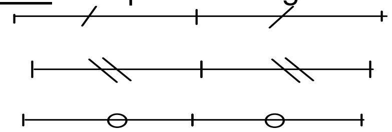
Segment [AB] Partie de la droite (AB) formée de tous les points situés entre A et B ([AB] et [BA] => même segment).

Extrémités : A et B

Distance AB Distance entre les points A et B

Segment : constitué d'une infinité de points et mesurable à la règle
Droite et demi-droite : infinies => n'ont pas de longueur

Coder la figure : marquer les longueurs égales avec des signes



!!! Le milieu est un point. La moitié est un nombre (la moitié de la longueur). !!!

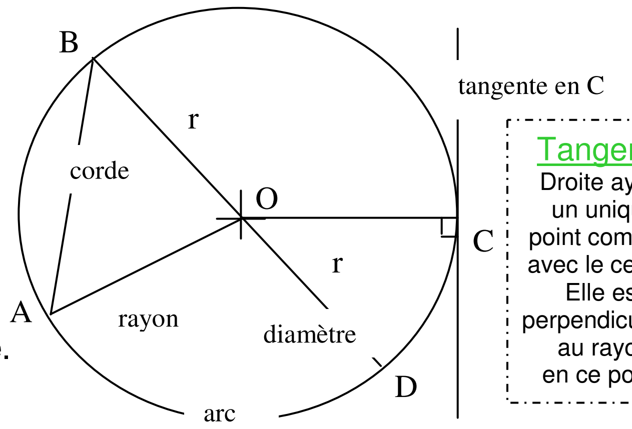
Symbole ∈ : signifie 'appartient à' *Ex* : C ∈ (AB)

Symbole ∉ : signifie 'n'appartient pas à'

Polygone Figure plane fermée dont les côtés sont des segments.

Cercle Tous les points situés à la même distance du centre.

M appartient au cercle de centre O et de rayon r <=> OM = r.



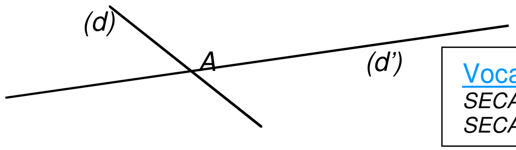
[AB] est une corde.
[OA] est un rayon.
[BD] est un diamètre.
$\overset{\frown}{AD}$ est un arc.

Tangente
Droite ayant un unique point commun avec le cercle. Elle est perpendiculaire au rayon en ce point.

DROITES

Définitions

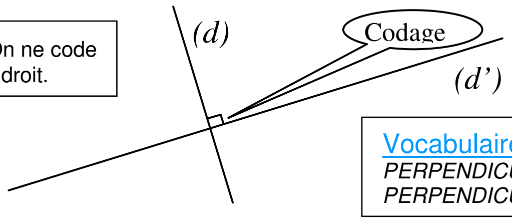
Droites sécantes : Droites qui ont un seul point commun, le point d'intersection.



Vocabulaire
SECANTE vient du verbe latin SECARE qui signifie COUPER.

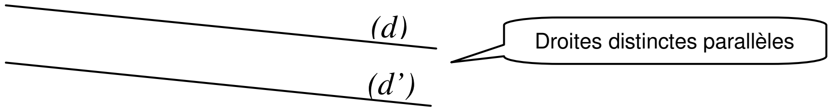
Droites perpendiculaires :
Droites qui se coupent en formant quatre angles droits (90°). On note (d) ⊥ (d')

Remarque : On ne code qu'un seul angle droit.



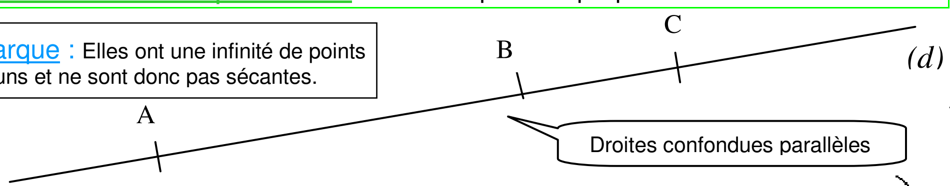
Vocabulaire
PERPENDICULAIRE vient du latin PERPENDICULUM qui signifie FIL A PLOMB.

Droites parallèles :
Droites qui ne sont pas sécantes. (même en les prolongeant). On note (d) // (d').



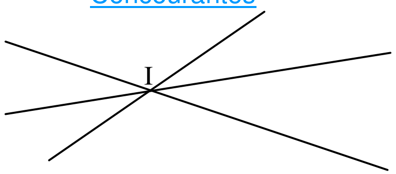
Droites confondues parallèles : Droites qui se superposent.

Remarque : Elles ont une infinité de points communs et ne sont donc pas sécantes.

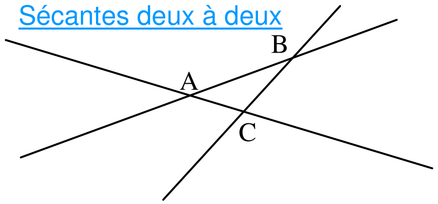


Position de droites sécantes

Concourantes



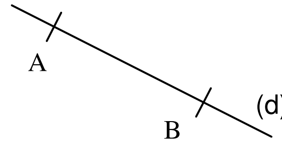
Sécantes deux à deux



Propriétés

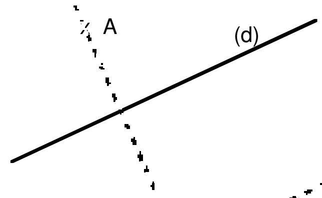
Deux points

Propriété : Droite passant par deux points
Par deux points distincts A et B,
il ne passe qu'une seule droite : (AB) ou (BA).

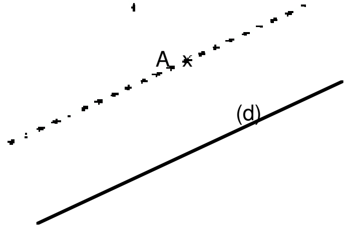


Droites et Points

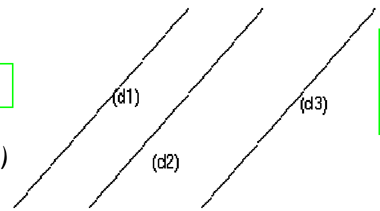
Propriété : Droite perpendiculaire passant par un point
Par un point donné, on ne peut tracer qu'une seule perpendiculaire à une droite donnée.



Propriété : Droite parallèle passant par un point
Par un point donné, on ne peut tracer qu'une seule parallèle à une droite donnée.

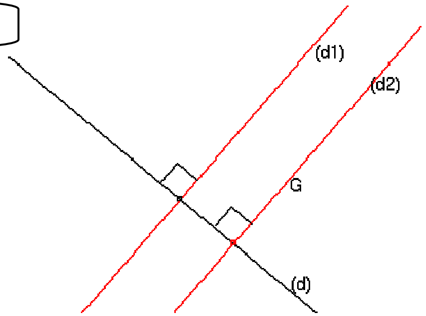


Droites perpendiculaires et parallèles



Si (d1)//(d2) et (d2)//(d3) alors (d1)//(d3)

Propriété : Parallèles
Si deux droites sont parallèles entre elles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.



Si (d1)//(d2) et (d)⊥(d1) alors (d)⊥(d2)

Propriété : Parallèles et perpendiculaires
Si deux droites sont parallèles entre elles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si (d1)⊥(d) et (d2)⊥(d) alors (d1)//(d2)

Propriété réciproque
Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION

Je sais que…

DONNEES

de l'énoncé
ou
conclusions précédentes

…ce que je sais pour la question…

Or…

OUTIL

Définition

Propriété

Théorème

Réciproque

…ce que j'ai appris dans mon cours…

Donc…

CONCLUSION

que je pourrai utiliser
ensuite comme donnée
si besoin

…ce que je dois prouver…

POLYGONES

Nature des polygones

Le nombre de sommets (ou de côtés, ou d'angles) indique la nature du polygone.

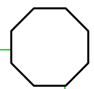
Nombre de sommets	Nature du polygone
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone
9	Ennéagone ou Nonagone
10	Décagone
12	Dodécagone

Notation

Les polygones ont un nom : il est donné par la lecture des sommets en suivant les côtés.
On peut commencer par n'importe lequel des sommets,
et tourner dans l'un ou l'autre sens autour de la figure.
Ex : ABCD ou BCDA ou DABC ou DCBA …etc...

Vocabulaire

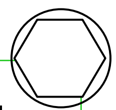
Deux côtés consécutifs d'un polygone sont deux côtés qui ont un sommet en commun.
Deux sommets consécutifs d'un polygone sont deux extrémités d'un côté.
Une diagonale dans un polygone est un segment dont les extrémités sont deux sommets qui ne sont pas consécutifs.



Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur, et tous les angles la même mesure.

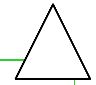
Ex: Triangle équilatéral, Carré …etc…
!!! Le rectangle et le losange ne sont pas des polygones réguliers. !!!



Cercle circonscrit

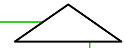
Il existe un cercle passant par tous les sommets d'un polygone régulier, c'est le cerce circonscrit. Son centre est le centre du polygone régulier.

Quelques polygones particuliers…



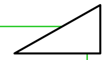
Triangle équilatéral

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même longueur.



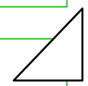
Triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle qui possède deux côtés de même longueur.
Son autre côté s'appelle la base, et le sommet opposé sommet principal.



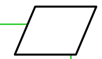
Triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit. Le côté opposé s'appelle l'hypoténuse.



Triangle rectangle isocèle

Un triangle rectangle isocèle est un triangle rectangle et isocèle,
donc un triangle qui a un angle droit et deux côtés de même longueur.

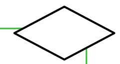


Parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

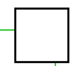
Rectangle

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.



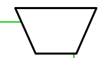
Losange

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.



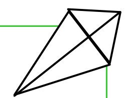
Carré

Un carré est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits.



Trapèze

Un trapèze est un quadrilatère
possédant deux côtés parallèles, les bases.

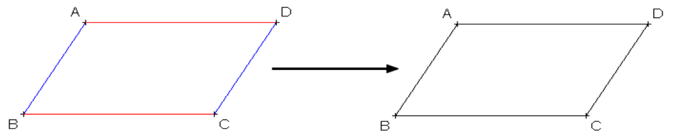


Cerf-volant

Un cerf-volant est un quadrilatère
ayant deux paires de côtés consécutifs de même longueur.

PARALLELOGRAMMES

Parallélogrammes



Les côtés opposés sont parallèles deux à deux

donc par définition ABCD est un parallélogramme

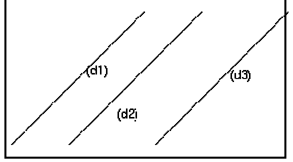
DEFINITION

Un parallélogramme ABCD est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles :
(AB) // (DC) et (AD) // (BC)

RAPPEL

On utilise souvent :

Si (d1)//(d2)
et (d3)//(d1)
alors (d3)//(d2)

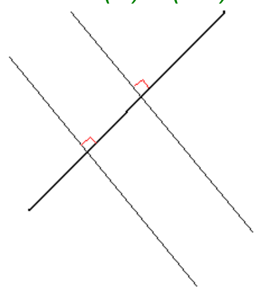


RAPPEL

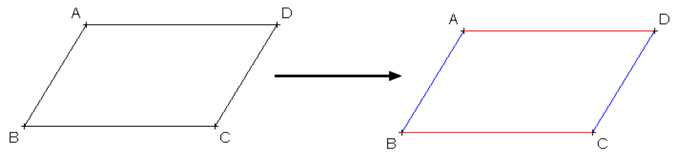
On utilise souvent :

Si (d1)⊥(d)
et (d2)⊥(d)
alors (d1)//(d2)

Si (d1)//(d2)
et (d)⊥(d1)
alors (d)⊥(d2)



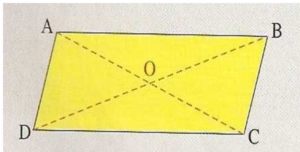
Propriétés des parallélogrammes



ABCD est un parallélogramme

donc par définition les côtés opposés sont parallèles deux à deux

PROPRIETES



Si ABCD est un parallélogramme, alors :

- ses côtés opposés sont parallèles.
(AB) // (DC) et (AD) // (BC)

- ses côtés opposes sont égaux.
AB = DC et AD = BC

- ses diagonales se coupent en leur milieu.
[AC] et [BD] se coupent en O.

- ses angles opposés sont égaux et deux angles consécutifs sont supplémentaires.

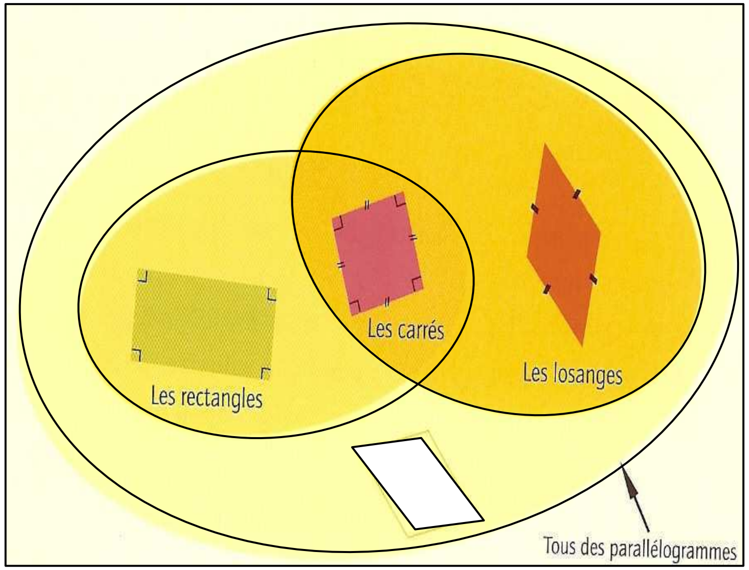
$\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$ et $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$

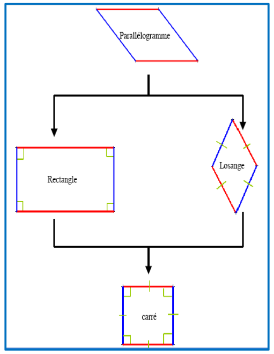
Rappel

Un carré est un rectangle et un losange.

Familles de parallélogrammes

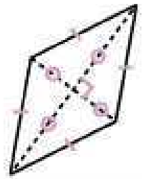
(Quadrilatères ayant les côtés parallèles et égaux deux à deux)

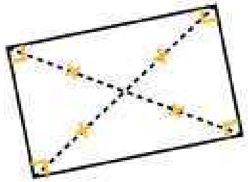




Propriétés des parallélogrammes particuliers

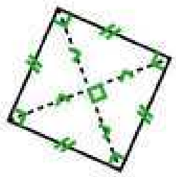
Si un quadrilatère est un losange, alors :
- ses côtés sont de la même longueur
- ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.





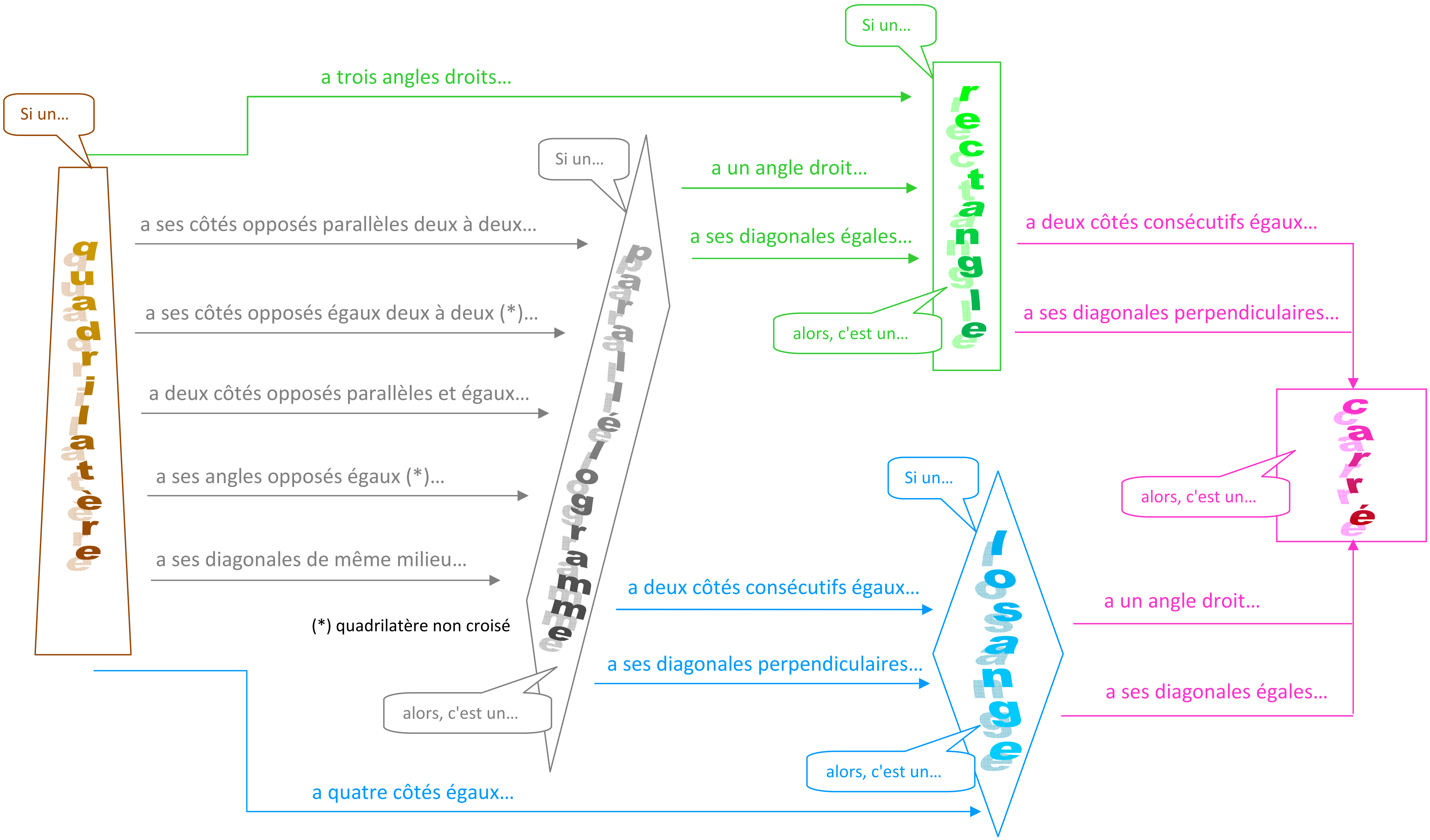
Si un quadrilatère est un rectangle, alors :
- ses côtés consécutifs sont perpendiculaires
- ses diagonales se coupent en leur milieu et sont de la même longueur.

Si un quadrilatère est un carré, alors :
- ses côtés consécutifs sont perpendiculaires et de même longueur
- ses diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et de même longueur.



PARALLELOGRAMMES

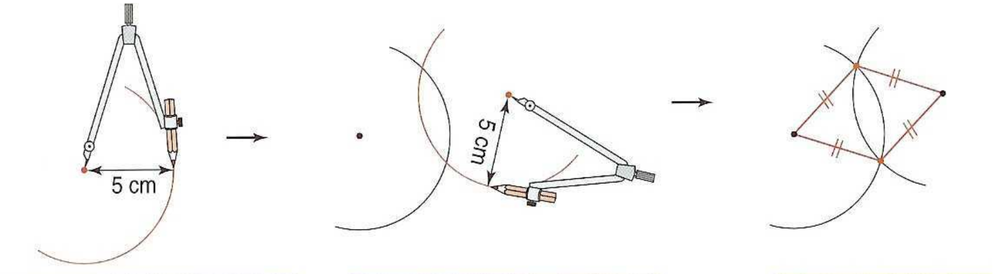
Récapitulatif des propriétés : Comment démontrer ?…



CONSTRUIRE ET RECONNAITRE UN QUADRILATERE (POLYGONE A 4 COTES)

Je construis …

Je construis un losange :

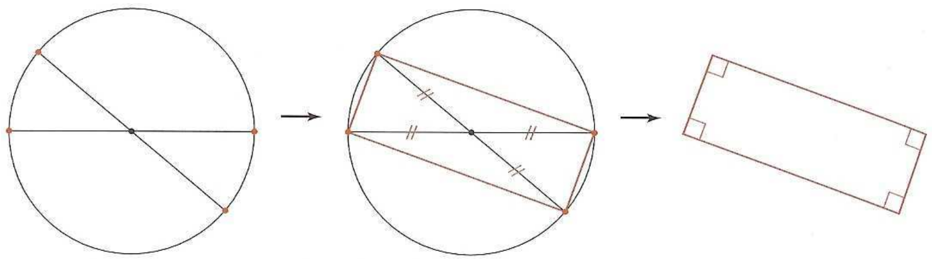


1. Tracer un arc de cercle de 5 cm de rayon.

2. Puis un autre coupant le premier en deux points.

3. On obtient le losange souhaité.

Je construis un rectangle :

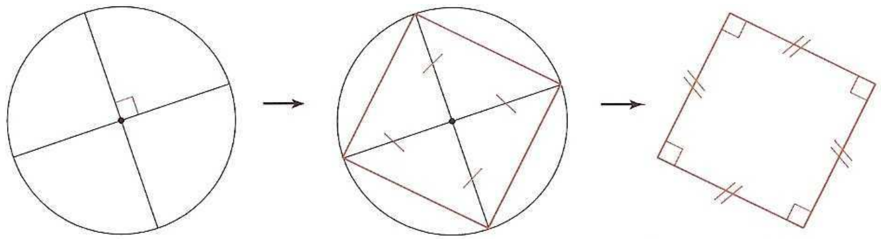


1. Construire deux diamètres quelconques d'un cercle.

2. Joindre les extrémités des diamètres.

3. On obtient un rectangle.

Je construis un carré :



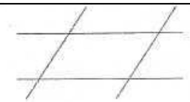
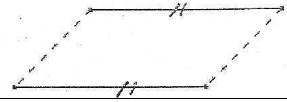
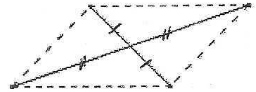
1. Tracer deux diamètres perpendiculaires d'un cercle.

2. Joindre les extrémités des diamètres.

3. On obtient un carré.

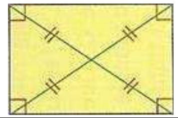
Je reconnais …

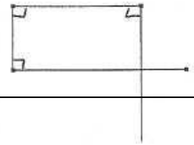
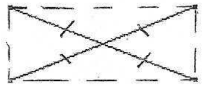
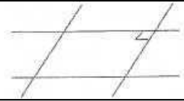
Je reconnais un parallélogramme

		
Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme.	Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.	Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

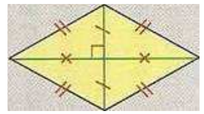
Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

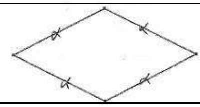
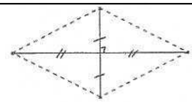
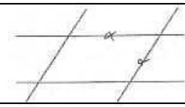
Je reconnais un rectangle



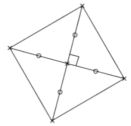
		
Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.	Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur, alors c'est un rectangle.	Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

Je reconnais un losange

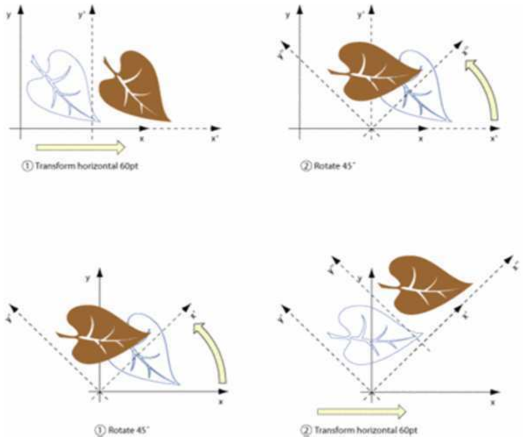


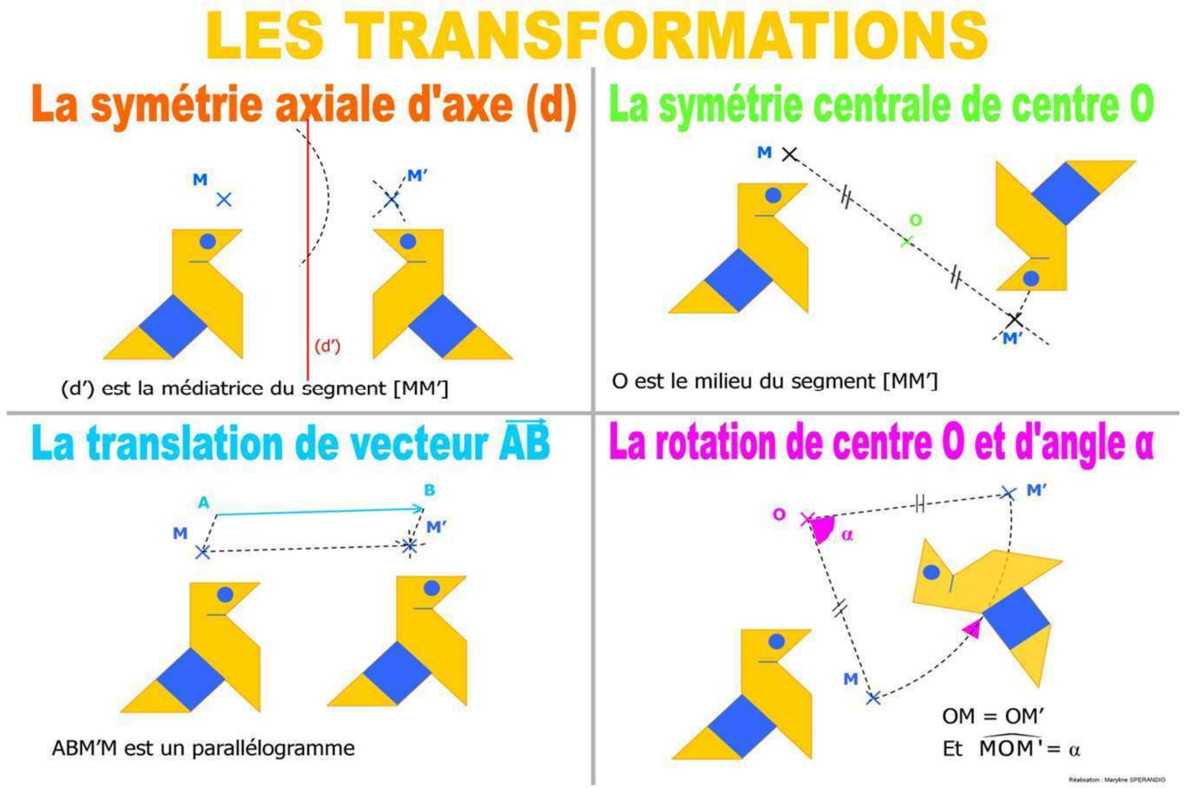
		
Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.	Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.	Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.

Je reconnais un carré



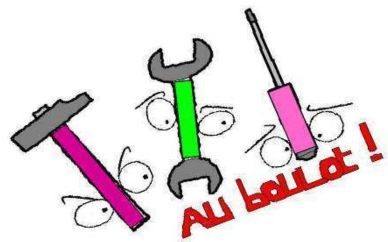
Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange, alors c'est un carré.





Géométrie

Transformations

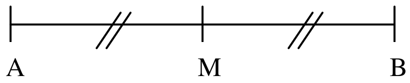


LA MEDIATRICE

Rappel : Milieu et longueur d'un segment

Longueur de [AB] : distance de A à B

Ex : AB = 5 cm MA = MB = 5 : 2 = 2,5 cm



Milieu d'un segment : point du segment situé à égale distance des extrémités

Propriété : On a aussi MA = MB = AB : 2 = $\frac{AB}{2}$

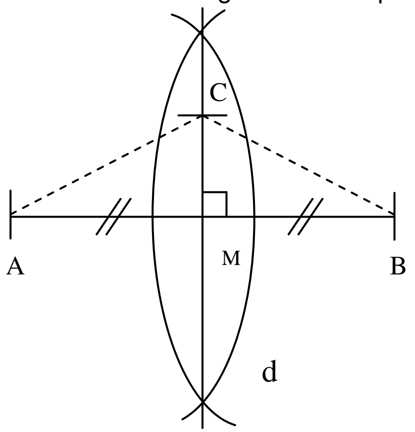
Médiatrice d'un segment

Médiatrice d'un segment : droite qui passe par le milieu du segment et est perpendiculaire à ce segment.

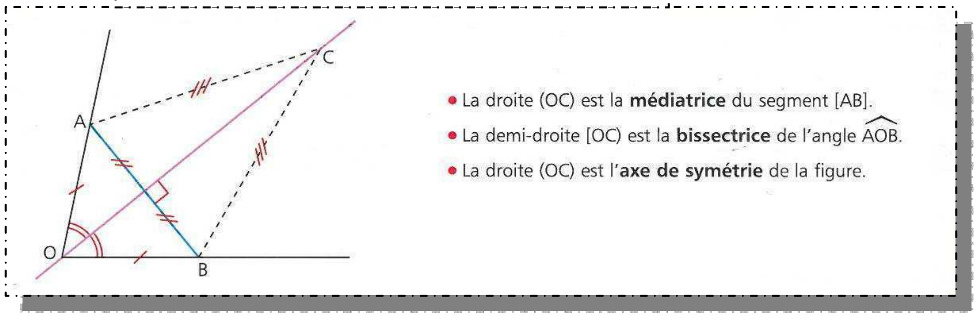
Construction

- Choisir un écartement du compas supérieur à la moitié de la longueur du segment.
- Tracer un arc de cercle de centre une des extrémités du segment.
- Garder le même écartement,
  et tracer un arc de cercle de centre l'autre extrémité du segment.
- Tracer la médiatrice qui est la droite qui passe par les 2 points d'intersection.

Ex : Soit un segment [AB] et une droite d.
Construire à la règle et au compas le milieu M du segment [AB] et sa médiatrice.

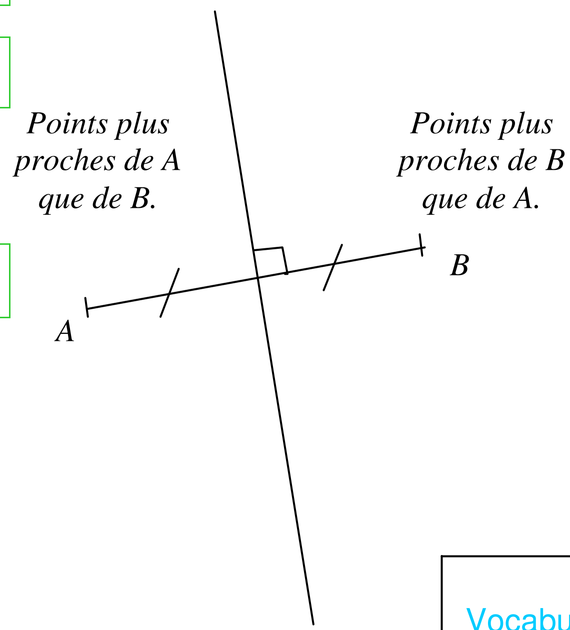


Une figure clé en Géométrie…



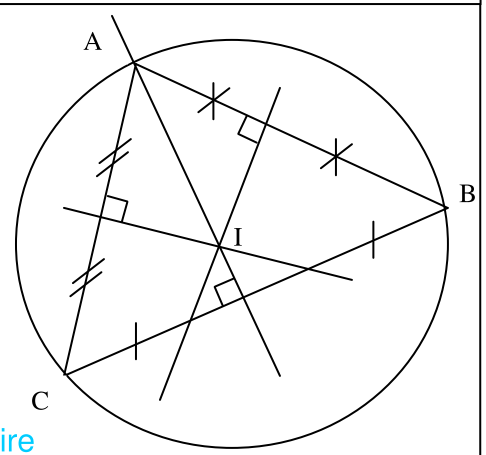
Propriété : Si un point appartient à la médiatrice du segment [AB], alors il est équidistant des points A et B (c.à.d. à la même distance de A et de B).
Ex : (d) est la médiatrice de [AB]. C ∈ (d). On a donc CA = CB.

Propriété réciproque : Si le point C est équidistant des points A et B, c'est à dire si CA = CB, alors C appartient à la médiatrice du segment [AB].



Application de la médiatrice

Tracer un triangle ABC.
Tracer les 3 médiatrices des côtés.
Appeler I leur point d'intersection.
Tracer le cercle de centre I passant par un des sommets.



Vocabulaire

Ce cercle passe par les 3 sommets.
Il s'appelle le cercle circonscrit au triangle.

Démonstration

I appartient à la médiatrice de [AB] donc AI = BI,
I appartient à la médiatrice de [BC] donc BI = CI
I appartient à la médiatrice de [AC] donc AI = CI

CONCLUSION :
On a donc AI = BI = CI.
A, B, C sont sur le cercle de centre I et de rayon [IA].

SYMETRIE AXIALE

SYMETRIE CENTRALE

Le mot symétrie vient du grec syn : "avec" et metron : "mesure".

RAPPEL : Médiatrice

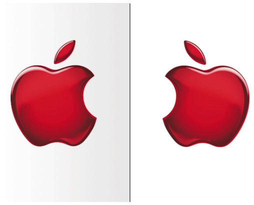
La médiatrice d'un segment est la droite qui
- passe par le milieu du segment
- est perpendiculaire à ce segment.

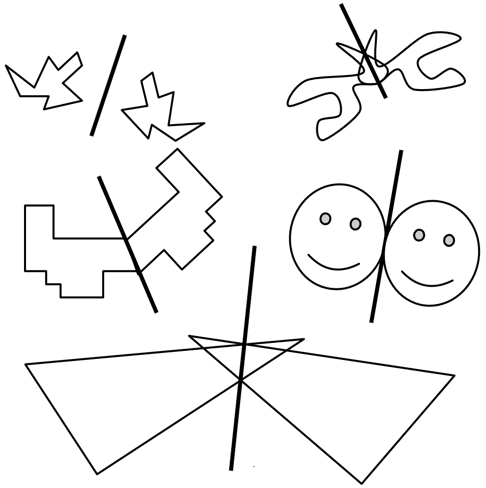
RAPPEL : Propriété

Tous les points de la médiatrice de [AB] sont équidistants de A et de B (c'est à dire à la même distance de A et de B).
Si C appartient à la médiatrice, on a donc CA = CB.

La symétrie axiale

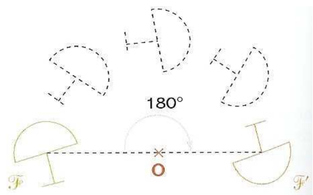
C''est l'effet miroir.
Deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d) lorsqu'elles se superposent parfaitement par pliage selon cette droite (d).

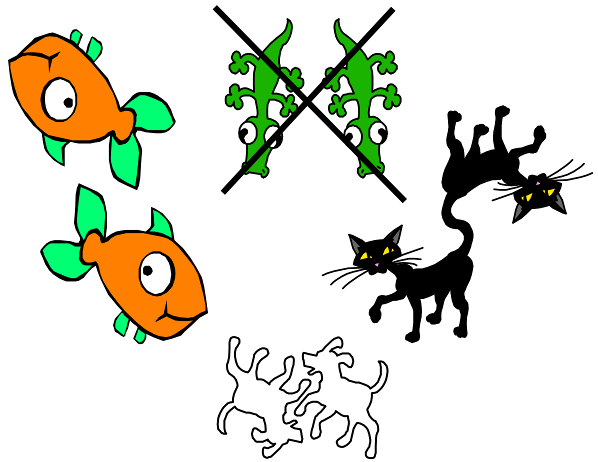




La symétrie centrale

C''est un demi-tour.
Deux figures sont symétriques par rapport à un point O lorsqu'elles se superposent parfaitement par demi-tour autour du point O.





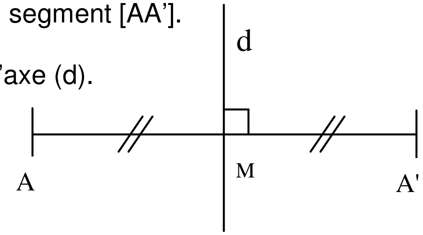
Symétrie d'un point par rapport à une droite

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) si d est la médiatrice du segment [AA'].

Vocabulaire

A' est l'<u>image</u> de A dans la symétrie axiale d'axe (d).

Ex :



Remarque

Tout point de (d) est son propre symétrique.

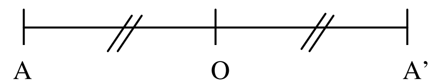
Symétrie d'un point par rapport à un point

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à un point O si O est le milieu du segment [AA'].

Vocabulaire

A' est l'<u>image</u> de A dans la symétrie centrale de centre O.

Ex :



Remarque

O est son propre symétrique.

Symétrie d'une figure par rapport à une droite

Deux figures sont symétriques par rapport à une droite (d) si ces deux figures se superposent exactement par pliage selon cette droite.

Vocabulaire

(d) est appelé <u>axe</u> de symétrie.
F' est l'<u>image</u> de F dans la symétrie axiale par rapport à (d).
F est aussi l'image de F' par rapport à l'axe (d).
(=> F et le symétrique de F' sont confondus.)

Symétrie d'une figure par rapport à un point

Deux figures sont symétriques par rapport à un point O si l'on passe de l'une à l'autre en effectuant un demi-tour autour de ce point.

Vocabulaire

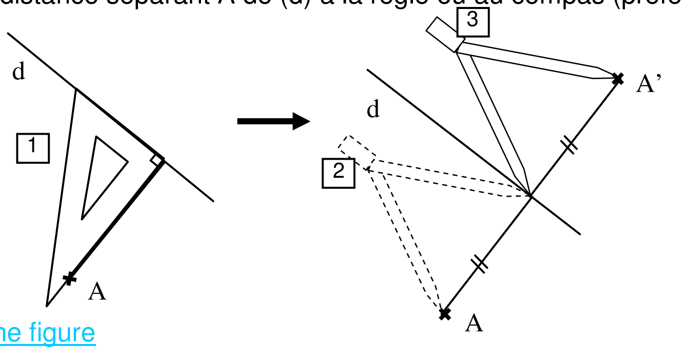
O est appelé <u>centre</u> de symétrie.
F' est l'<u>image</u> de F dans la symétrie centrale par rapport à O.
F est aussi l'image de F' par rapport au centre O.
(=> F et le symétrique de F' sont confondus.)

SYMETRIE AXIALE

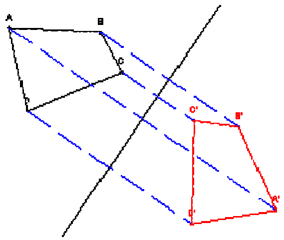
Méthode de construction

Symétrie d'un point A

- Tracer la droite perpendiculaire à (d) passant par A grâce à l'équerre,
- Reporter la distance séparant A de (d) à la règle ou au compas (préférable).



Symétrie d'une figure



Si la figure est reproductible à la règle et au compas

On construit l'image de ses points caractéristiques.
- Choisir des points représentatifs,
- Construire leur symétrique,
- Les relier comme sur la figure initiale (même ordre).

Si la figure est reproductible à main levée

On utilise un calque.
- Choisir quelques points et construire leur symétrique par rapport à l'axe.
- Reporter la figure grâce aux points en superposant le calque.

Propriété :

La symétrie axiale conserve
- l'alignement des points,
- la mesure des longueurs, donc des périmètres,
- la mesure des angles,
- la mesure des aires, puisque les figures se superposent.

Image d'une figure : figure ayant les mêmes propriétés et les mêmes dimensions. Elle est inversée. La symétrie axiale inverse le sens des figures.

Symétrique d'une droite : une droite
Symétrique d'un segment : un segment de même longueur
Symétrique d'une demi-droite : une demi-droite d'origine A' symétrique de A
Symétrique d'un cercle : un cercle de même rayon et de centre O' image de O
Symétrique d'un rectangle : un rectangle
Symétrique d'un angle : On construit les symétriques des deux demi-droites.

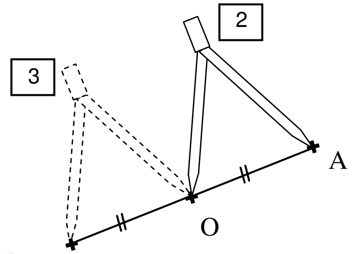
SYMETRIE CENTRALE

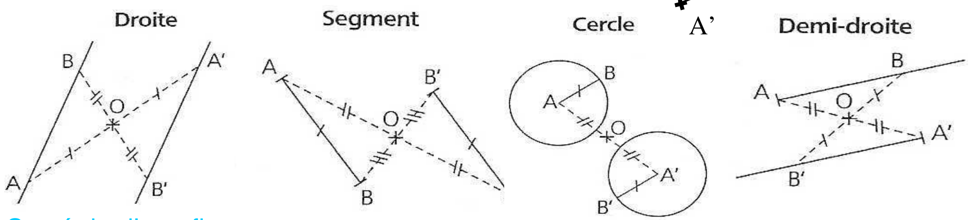
Méthode de construction

Symétrie d'un point A

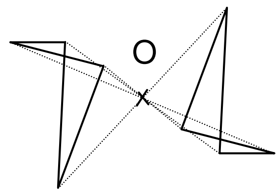
- Tracer la demi-droite [AO),
- Reporter sur la demi-droite la distance AO.

(Tracer l'arc de cercle de centre O et de rayon OA, il coupe la demi-droite [AO) au point A')





Symétrie d'une figure



Si la figure est reproductible à la règle et au compas

On construit l'image de ses points caractéristiques.
- Choisir des points représentatifs,
- Construire leur symétrique,
- Les relier comme sur la figure initiale (même ordre).

Si la figure est reproductible à main levée

On utilise un calque.
- Choisir quelques points et construire leur symétrique par rapport au centre.
- Reporter la figure grâce aux points en superposant le calque.

Propriété :

La symétrie centrale conserve
- l'alignement des points,
- la mesure des longueurs, donc des périmètres,
- la mesure des angles,
- la mesure des aires, puisque les figures se superposent.

Image d'une figure : figure ayant les mêmes propriétés et les mêmes dimensions. Elle est retournée. La symétrie centrale retourne le sens des figures.

Symétrique d'une droite : une droite parallèle
Symétrique d'un segment : un segment parallèle et de même longueur
Symétrique d'une demi-droite : une demi-droite parallèle et de sens contraire
Symétrique d'un cercle : un cercle de même rayon et de centre O' image de O
Symétrique d'un rectangle : un rectangle
Symétrique d'un angle : On construit les symétriques des deux demi-droites.

AXES ET CENTRES DE SYMETRIE

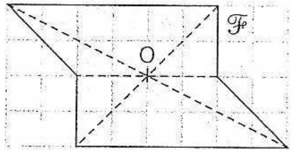
Axe de symétrie

Une figure F admet un axe de symétrie d
lorsque la figure symétrique de F par rapport à d
est la figure F elle-même.
Elle se superpose à elle-même par pliage selon la droite d.

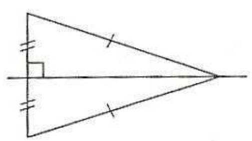
Centre de symétrie

Une figure F admet un centre de symétrie O
lorsque la figure symétrique de F par rapport à O
est la figure F elle-même.
Elle se superpose à elle-même par demi-tour autour du point O.

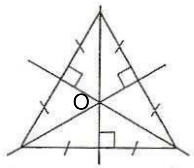
Une figure a
0 ou 1 centre de symétrie
(sauf les droites).
Elle peut avoir
plusieurs axes de symétrie.



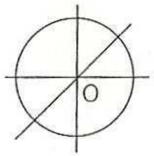
Triangle isocèle



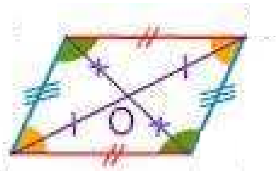
Triangle équilatéral



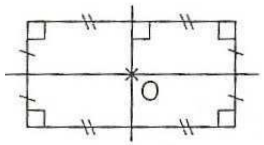
Cercle de centre O



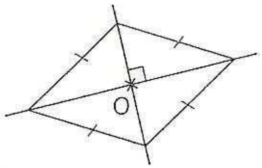
Parallélogramme



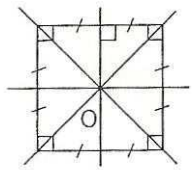
Rectangle



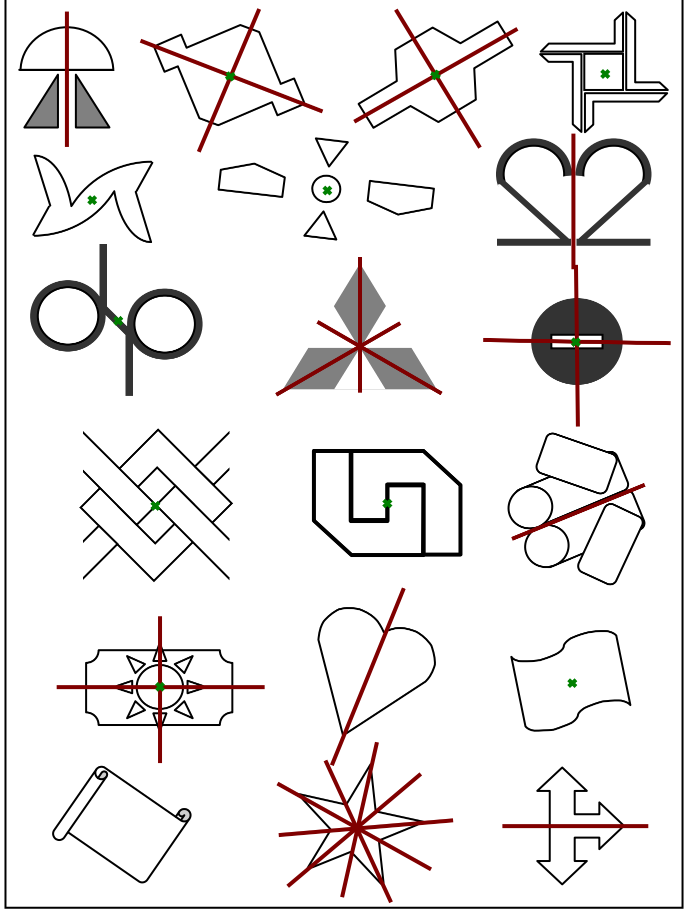
Losange



Carré

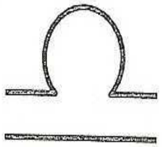
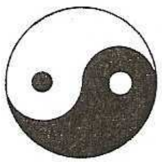
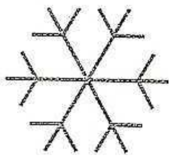
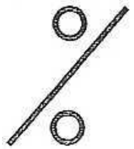


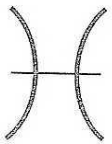
Quelques Exemples d'axes et centres de symétrie



Axes de symétrie	**Figure**	Centre de symétrie
Elle-même Toutes les droites perpendiculaires	**Droite**	Tous ses points (seule figure à en avoir une infinité)
1 médiatrice de sa base = bissectrice de l'angle au sommet principal	**Triangle isocèle**	/
3 médiatrices des côtés = 3 bissectrices des angles	**Triangle équilatéral**	/
Tous les diamètres	**Cercle de centre O**	Centre du cercle
/	**Parallélogramme**	Point d'intersection des diagonales
2 médiatrices des côtés	**Rectangle**	Point d'intersection des diagonales
2 diagonales	**Losange**	Point d'intersection des diagonales
2 diagonales + 2 médiatrices des côtés	**Carré (losange + rectangle)**	Point d'intersection des diagonales

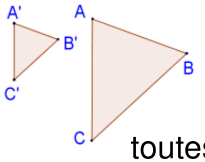
Application : Dans chaque cas, tracer le centre de symétrie, le ou les axes de symétrie s'il y en a.

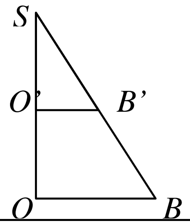


AGRANDISSEMENTS ET REDUCTIONS

Transformations à l'échelle k



Dans un agrandissement (si k > 1)
ou une réduction (si 0 < k < 1)
de rapport k (ou à l'échelle k),
toutes les longueurs restent proportionnelles.



Effet sur les dimensions :

Ex : O'B' est une réduction de OB.
On se trouve dans la situation de Thalès.
Il y a donc le même rapport (l'échelle)
entre les longueurs obtenues et initiales.

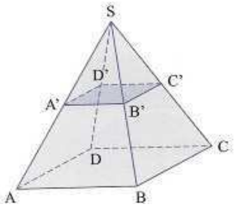
Conséquence sur les mesures :

- Les longueurs sont multipliées par k.
- Les aires sont multipliées par k^2.
- Les volumes sont multipliés par k^3.
- Les angles sont conservés.

Explication :

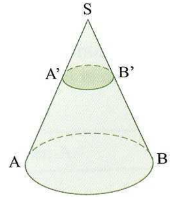
Les aires se calculent en multipliant deux dimensions
qui ont été multipliées par k, elles seront donc multipliées par k².
Les volumes se calculent en multipliant trois dimensions
qui ont été multipliées par k, ils seront donc multipliés par k^3.

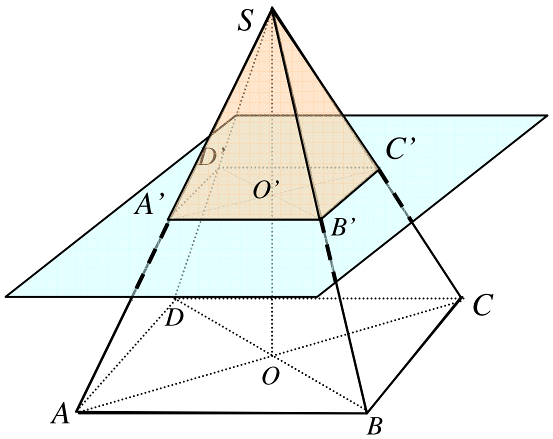
CAS PARTICULIER : LA PYRAMIDE ET LE CONE



Pour obtenir une réduction, on effectue une section par un plan parallèle à la base.
Pour faire les calculs, on utilise généralement le théorème de Thalès.

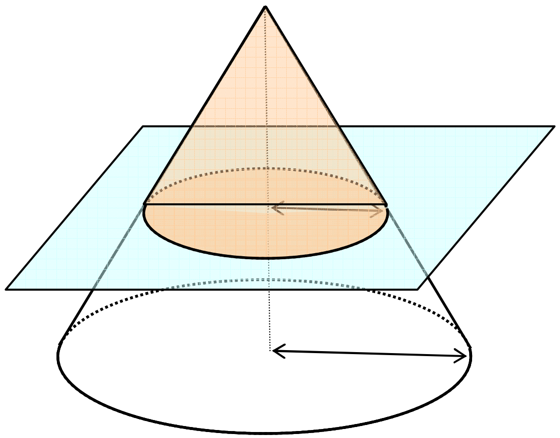
Remarque La section est une réduction du polygone ou du cercle de base.
Elle fait apparaître au-dessus une pyramide ou un cône réduit,
et en-dessous un tronc de pyramide ou un tronc de cône.

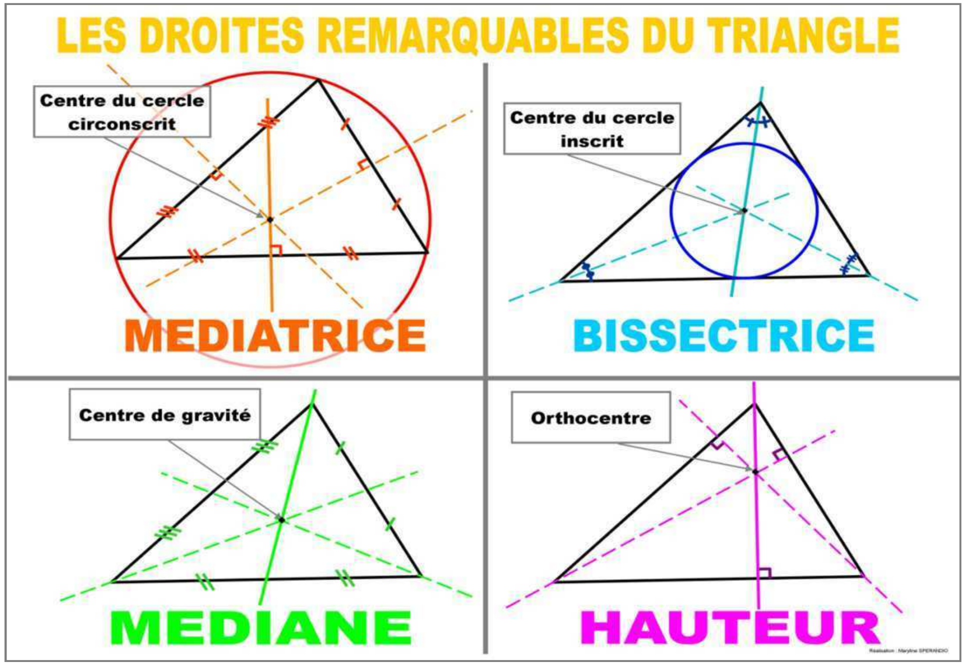




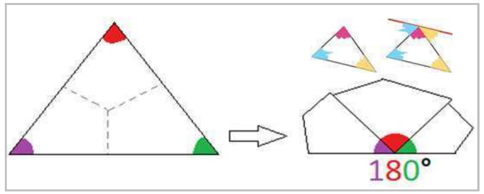
Le petit cône est une réduction du grand.
Echelle de réduction : $\boldsymbol{k} = \dfrac{\mathbf{SA'}}{\mathbf{SA}}$ ($k < 1$)
Le grand cône est un agrandissement du petit.
Echelle d'agrandissement : $\boldsymbol{k'} = \dfrac{\mathbf{SA}}{\mathbf{SA'}}$ ($k' > 1$)

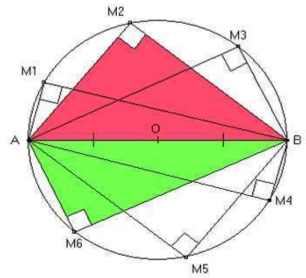
SA'B'C'D' : réduction de SABCD
Echelle de réduction : $\boldsymbol{k} = \dfrac{\mathbf{SA'}}{\mathbf{SA}}$ ($k < 1$)
SABCD : agrandissement de SA'B'C'D'
Echelle d'agrandissement : $\boldsymbol{k'} = \dfrac{\mathbf{SA}}{\mathbf{SA'}}$ ($k' > 1$)



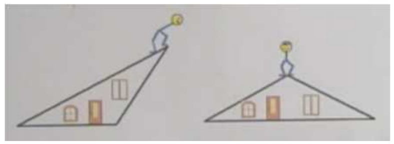


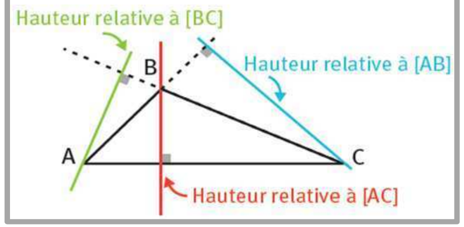
ET QUELQUES PROPRIETES…



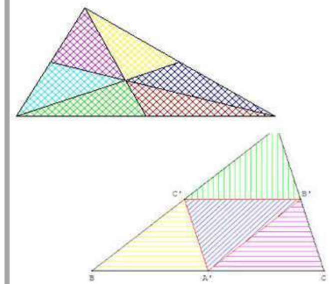


Pour trouver la hauteur d'un triangle,
Il suffit… de regarder d'en haut !





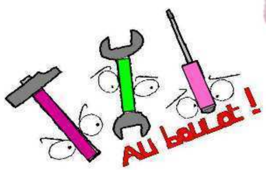
<u>Partager un triangle</u>
<u>en triangles d'aires</u>
<u>égales…</u>

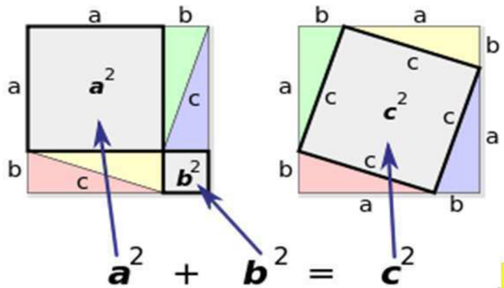


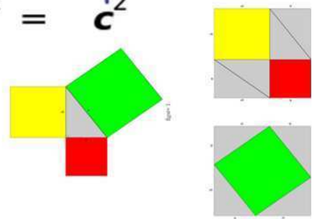
Géométrie

Angles

Triangles







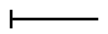
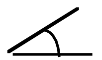
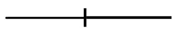
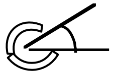
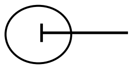
ANGLES

Angle : partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.
Demi-droites : côtés infinis de l'angle
Origine : sommet de l'angle.

Unité de mesure des angles : le degré (noté °).
Instrument de mesure : le rapporteur.

Angles particuliers

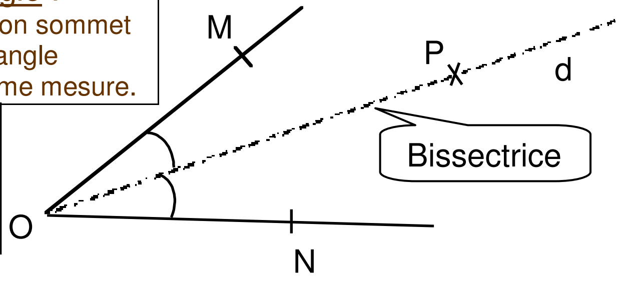
ANGLES SAILLANTS

mesure	angle	figure
0°	nul	
entre 0° et 90°	aigu	
90°	droit	
entre 90° et 180°	obtus	
180°	plat	
entre 180° et 360°	rentrant	
360°	plein	

Bissectrice d'un angle :

Droite qui passe par son sommet et qui partage l'angle en deux angles de même mesure.

PROPRIETE
Chaque point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle.



CONSTRUCTION
* Tracer un arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle en M et N.
* Garder le même écartement de compas pour tracer deux arcs sécants de centres M et N.
* La bissectrice est la droite passant par le sommet de l'angle et le point d'intersection des deux arcs de cercle P.

Paires d'angles

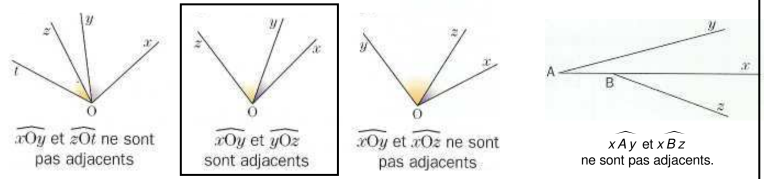
Angles complémentaires :
Deux angles dont la somme fait 90°

Angles supplémentaires :
Deux angles dont la somme fait 180°

Quelle que soit la position des angles :
...... + ... = 90°
...... + ... = 180°

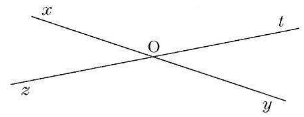
MEMOTECHNIK
"K" "K"
"S" "S"

Angles adjacents : Deux angles qui
- ont le même sommet,
- ont un côté commun,
- sont situés de part et d'autre de ce coté.



Angles opposés par le sommet : Deux angles qui
- ont le même sommet,
- leurs côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

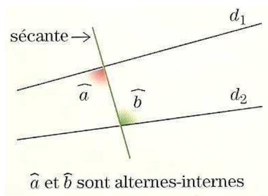
=> Ils ont même mesure.

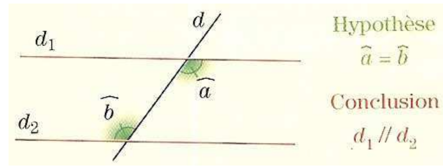


$\widehat{xOz}$ et $\widehat{tOy}$ opposés par le sommet
$\widehat{xOt}$ et $\widehat{zOy}$ opposés par le sommet

Angles alternes – internes :
d_1 *et* d_2 *sont coupées par une droite sécante* Δ.
- deux angles non-adjacents
- situés de part et d'autre de la droite Δ
et entre les droites d_1 *et* d_2.

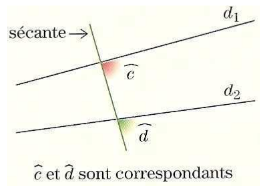
Les droites sont parallèles.
<=> Ils ont même mesure.

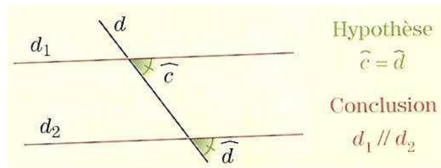




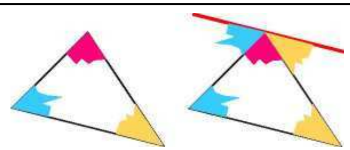
Angles correspondants :
d_1 et d_2 sont coupées par une droite sécante Δ.
- deux angles non-adjacents
- situés d'un même côté de la droite Δ
l'un entre d_1 et d_2 et l'autre non.

Les droites sont parallèles.
<=> Ils ont même mesure.





PROPRIETE : ANGLES D'UN TRIANGLE
La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.



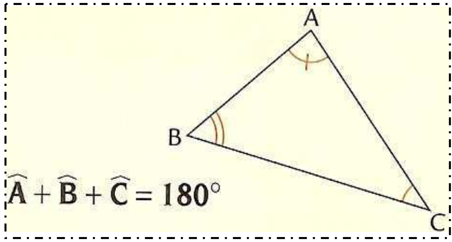
TRIANGLES
PROPRIETES DES TRIANGLES

INEGALITE TRIANGULAIRE

La longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

BC ≤ BA + AC

(Pour aller de B à C, la plus courte distance est "tout droit", c'est-à-dire en suivant le segment reliant B et C.)

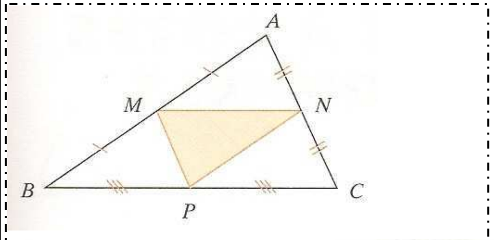


Somme des angles d'un triangle

Elle est égale à 180°.

THEOREMES DE 4e

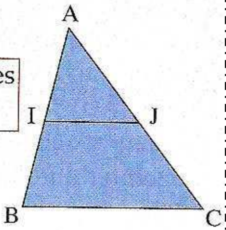
Triangle des milieux



*MNP est le **triangle des milieux** :*
- *ses côtés sont parallèles à ceux de ABC ;*
- *ses angles sont égaux à ceux de ABC ;*
- *son périmètre est la moitié de celui de ABC ;*
- *son aire est le quart de celle de ABC .*

Théorème des milieux

ABC est un triangle.



- Si I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AC],

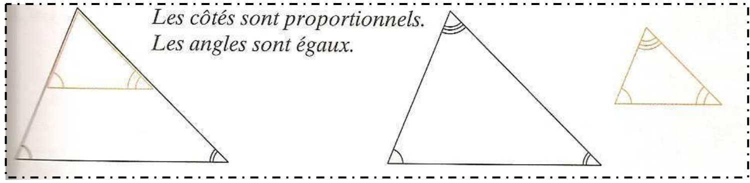
alors (IJ) // (BC) et $IJ = \frac{1}{2}BC$.

- Si I est le milieu de [AB] et J un point de [AC] tel que (IJ) // (BC),

alors J est le milieu de [AC].

Agrandissement et Réduction

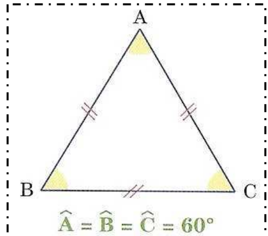
Le coefficient de proportionnalité entre les côtés des triangles est l'échelle.



Le triangle noir est un agrandissement du triangle rouge. <=> échelle > 1
Le triangle rouge est une réduction du triangle noir. <=> 0 < échelle < 1

TRIANGLE EQUILATERAL

Triangle dont les trois côtés ont la même longueur.

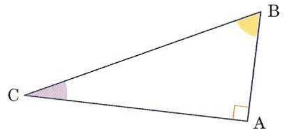


Propriété

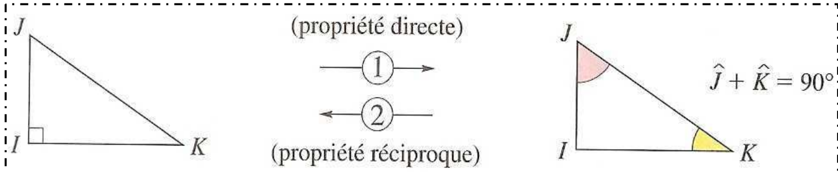
Les trois angles ont même mesure : $\frac{180°}{3} = 60°$

TRIANGLE RECTANGLE

Triangle qui a un angle droit.
Le plus grand côté s'appelle **l'hypoténuse**.

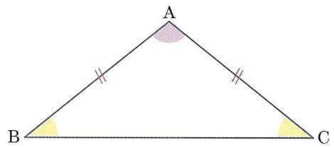


Propriété

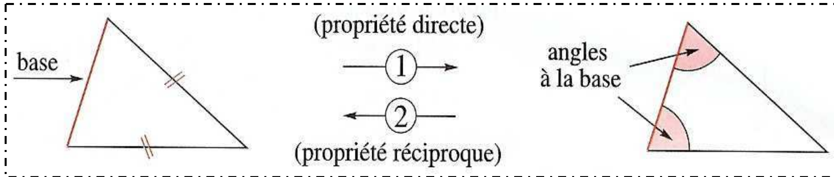


TRIANGLE ISOCELE

Triangle qui a deux côtés de même longueur.
Deux angles ont également même mesure.



Propriété

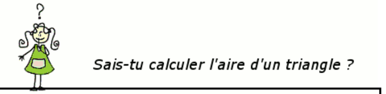


TRIANGLE RECTANGLE ISOCELE

Triangle qui a un angle droit et deux côtés de même longueur.

Propriété

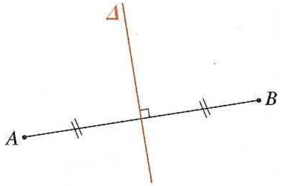
Les deux angles à la base ont même mesure : $\frac{180° - 90°}{2} = 45°$



TRIANGLES
DROITES REMARQUABLES DES TRIANGLES

MEDIATRICE D'UN SEGMENT

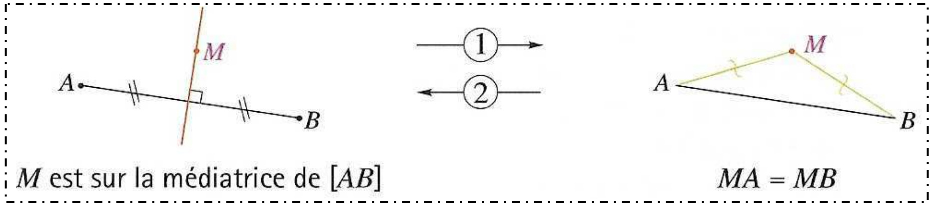
Droite perpendiculaire au segment et passant par son milieu.

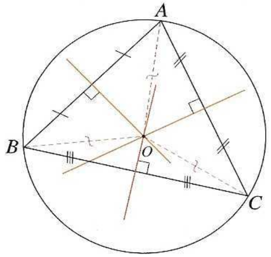


La droite Δ est la médiatrice du segment $[AB]$

Propriété Equidistance

Chaque point de la médiatrice est à égale distance des extrémités du segment.





DANS UN TRIANGLE…

… Les trois médiatrices des côtés sont concourantes (se coupent en un point).
Le point d'intersection est le **centre du cercle circonscrit** au triangle (qui passe par les sommets du triangle).

DANS UN TRIANGLE EQUILATERAL…

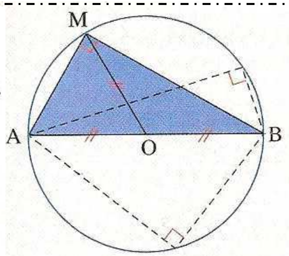
Les trois médianes, médiatrices, hauteurs, bissectrices sont confondues.

DANS UN TRIANGLE ISOCELE…

La médiane de la base, la médiatrice à la base, la hauteur relative à la base et la bissectrice de l'angle opposé sont confondues.

THEOREME DE 4^{e} — Triangle rectangle et cercle circonscrit

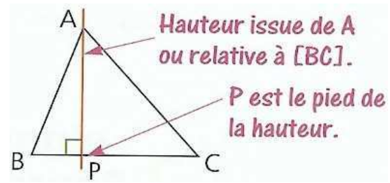
- Si AMB est un triangle rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].
- Si un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB], alors AMB est un triangle rectangle en M

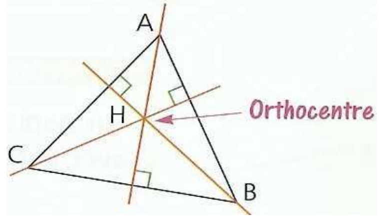


O est le milieu de l'hypoténuse [AB].
OA = OB = OM

HAUTEUR ISSUE D'UN SOMMET

Droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



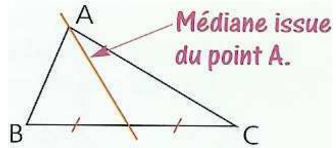


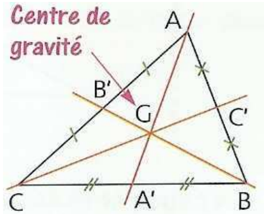
DANS UN TRIANGLE…

… Les trois hauteurs issues des sommets sont concourantes.
Le point d'intersection est l'**orthocentre** du triangle.

MEDIANE ISSUE D'UN SOMMET

Droite qui passe par ce sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.





$AG = \frac{2}{3}AA'$

$BG = \frac{2}{3}BB'$

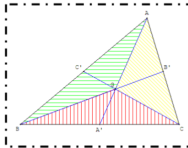
$CG = \frac{2}{3}CC'$

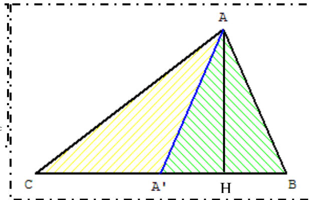
DANS UN TRIANGLE…

... Les trois médianes issues des sommets sont concourantes.
Le point d'intersection est le **centre de gravité** du triangle.

Propriété Partage d'un triangle

Une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.



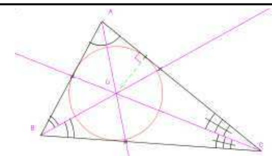


Aire (ABA') = $\frac{AH \times A'B}{2}$ et Aire (ACA') = $\frac{AH \times A'C}{2}$

Or (AA') étant médiane, on a A'C = A'B. Les aires des deux triangles sont donc égales.
De même, les trois médianes partagent un triangle en six triangles d'aires égales.

BISSECTRICE D'UN ANGLE

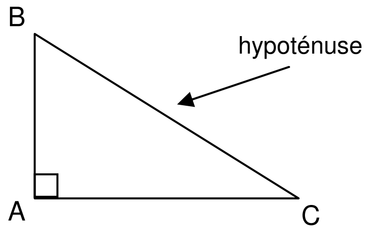
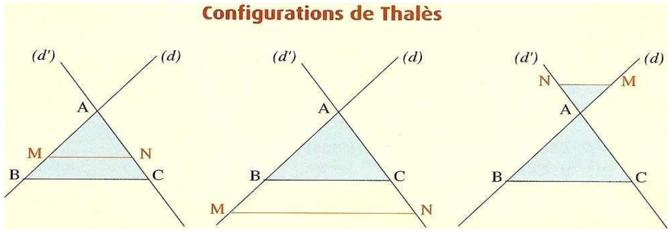
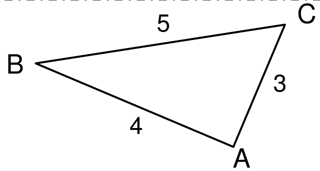
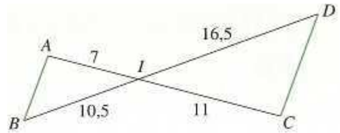
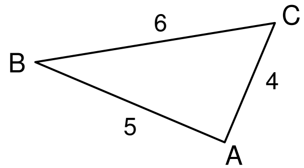
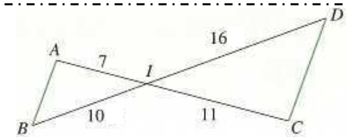
Droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.



DANS UN TRIANGLE…

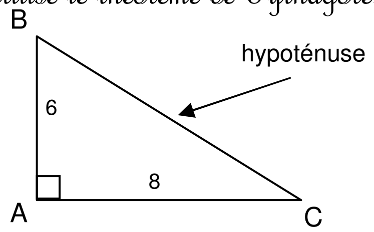
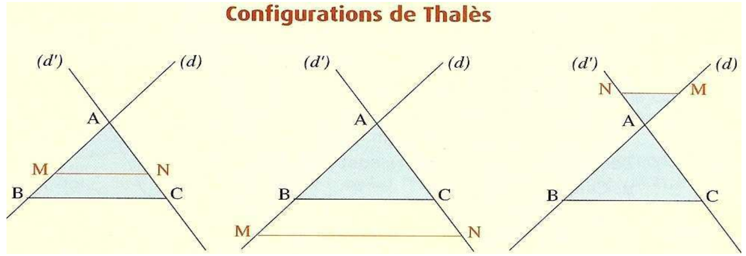
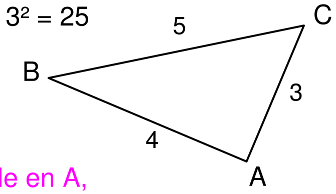
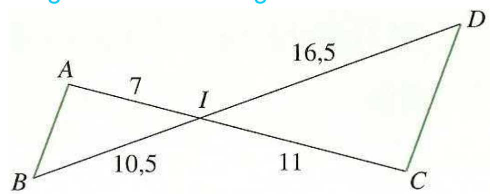
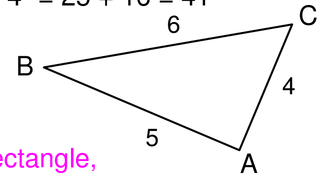
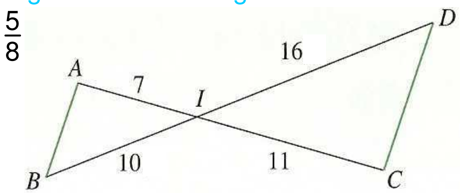
… Les trois bissectrices des angles sont concourantes.
Le point d'intersection est le **centre du cercle inscrit** au triangle (le cercle tangent aux trois côtés du triangle).

THEOREMES DE PYTHAGORE ET DE THALES, LEURS RECIPROQUES ET CONTRAPOSEES …

	J'utilise … PYTHAGORE	J'utilise … THALES
Je dois calculer une longueur et les droites sont …	… PERPENDICULAIRES, j'utilise le théorème de Pythagore. Si un triangle est rectangle, alors le carré (²) de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés (²) des longueurs des autres côtés. 	… PARALLELES, j'utilise le théorème de Thalès. Soient (BM) et (CN) deux droites sécantes en A Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Petit triangle Grand triangle 
Je dois démontrer que des droites sont …	… PERPENDICULAIRES, j'utilise la réciproque du théorème de Pythagore. Si dans un triangle, le carré (²) de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés (²) des longueurs des autres côtés, alors le triangle est rectangle. 	… PARALLELES, j'utilise la réciproque du théorème de Thalès. Soient deux droites (BM) et (CN) sécantes en A. Si deux des rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ sont égaux, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Il existe d'autres façons de démontrer le parallélisme.  Ex : Si (d1)⊥(d) et (d2)⊥(d) alors (d1)//(d2)
Je dois démontrer que des droites ne sont …	… PAS PERPENDICULAIRES, j'utilise la contraposée du théorème de Pythagore. Si dans un triangle, le carré (²) de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés (²) des longueurs des autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle. 	… PAS PARALLELES, j'utilise la contraposée du théorème de Thalès. Soient deux droites (BM) et (CN) sécantes en A. Si deux des rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ ne sont pas égaux, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles. 

THEOREMES DE PYTHAGORE ET DE THALES, LEURS RECIPROQUES ET CONTRAPOSEES …

Comment rédiger ?... Voici des exemples type :

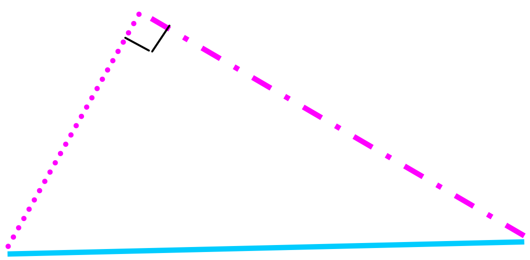
	J'utilise … PYTHAGORE	J'utilise … THALES
Je dois calculer une longueur et les droites sont …	… PERPENDICULAIRES, *j'utilise le théorème de Pythagore.*  Données : ABC est un triangle rectangle en A. Outil : D'après le théorème de Pythagore, Conclusion : On a $BC^2 \boxed{=} AB^2 + AC^2$ $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ On a donc $BC = \sqrt{100} = 10$.	… PARALLELES, *j'utilise le théorème de Thalès.*  Données : (BM) et (CN) sont sécantes en A, et (BC) // (MN). Outil : D'après le théorème de Thalès, Conclusion : On a $\frac{AM}{AB} \boxed{=} \frac{AN}{AC} \boxed{=} \frac{MN}{BC}$.
Je dois démontrer que des droites sont … ⚠ Ne pas oublier les autres outils !	… PERPENDICULAIRES, *j'utilise la réciproque du théorème de Pythagore.* Données : [BC] est le plus grand côté. $BC^2 = 5^2 = 25$ et $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ On constate que $BC^2 \boxed{=} AB^2 + AC^2$.  Outil : D'après la réciproque du théorème de Pythagore, Conclusion : Le triangle ABC est rectangle en A, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.	… PARALLELES, *j'utilise la réciproque du théorème de Thalès.* Données : IAB et IDC sont des triangles dans la configuration de Thalès. $\frac{IA}{IC} = \frac{7}{11}$ et $\frac{IB}{ID} = \frac{10{,}5}{16{,}5} = \frac{105}{165} = \frac{7}{11}$ On constate que $\frac{IA}{IC} \boxed{=} \frac{IB}{ID}$.  Outil : D'après la réciproque du théorème de Thalès, Conclusion : (AB) // (CD), les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Je dois démontrer que des droites ne sont …	… PAS PERPENDICULAIRES, *j'utilise la contraposée du théorème de Pythagore.* Données : [BC] est le plus grand côté. $BC^2 = 6^2 = 36$ et $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ On constate que $BC^2 \boxed{\neq} AB^2 + AC^2$.  Outil :D'après la contraposée du théorème de Pythagore, Conclusion : Le triangle ABC n'est pas rectangle, les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.	… PAS PARALLELES, *j'utilise la contraposée du théorème de Thalès.* Données : IAB et IDC sont des triangles dans la configuration de Thalès. $\frac{IA}{IC} = \frac{7}{11}$ et $\frac{IB}{ID} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ On constate que $\frac{IA}{IC} \boxed{\neq} \frac{IB}{ID}$.  Outil : D'après la contraposée du théorème de Thalès, Conclusion : Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

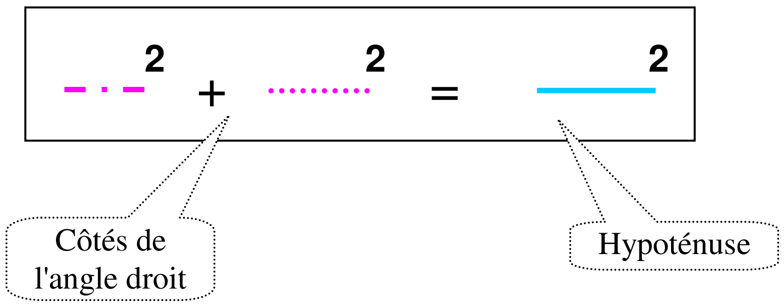
THEOREMES DE PYTHAGORE ET DE THALES

Ne pas se tromper dans les égalités…

J'utilise le théorème de Pythagore.

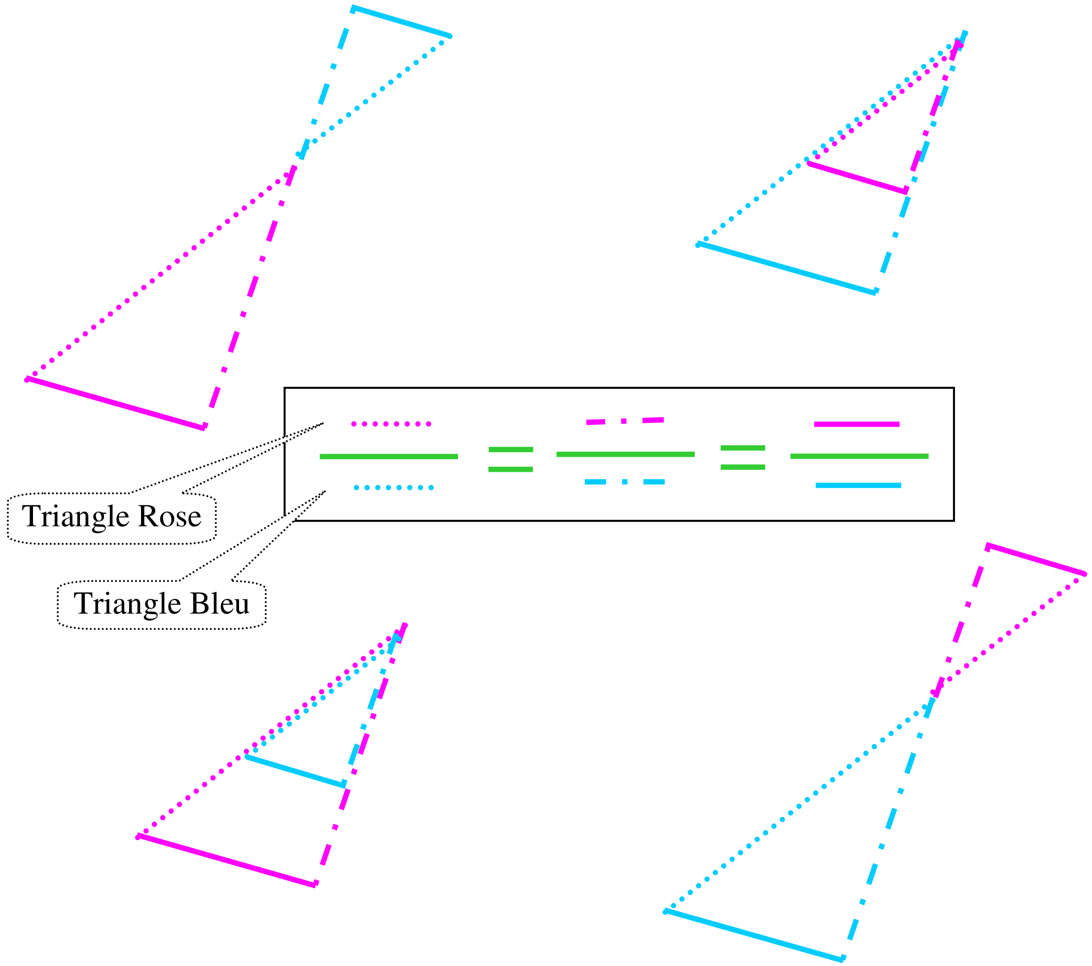
Si un triangle est rectangle,
alors le carré (²) de la longueur du plus grand côté
est égal à la somme des carrés (²) des longueurs des autres côtés.





J'utilise le théorème de Thalès.

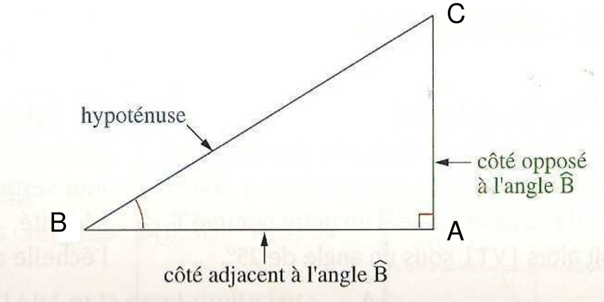
Si deux droites parallèles coupent deux droites sécantes,
alors elles déterminent deux triangles
dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.



TRIGONOMETRIE

Trigone = triangle et **Métrie =** mesure **Trigonométrie =** “mesure des triangles”

DANS UN TRIANGLE RECTANGLE …



$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

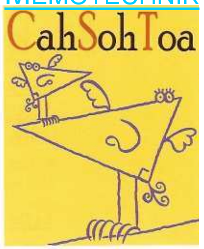
$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{B}} = \dfrac{AC}{AB}$

MEMOTECHNIK

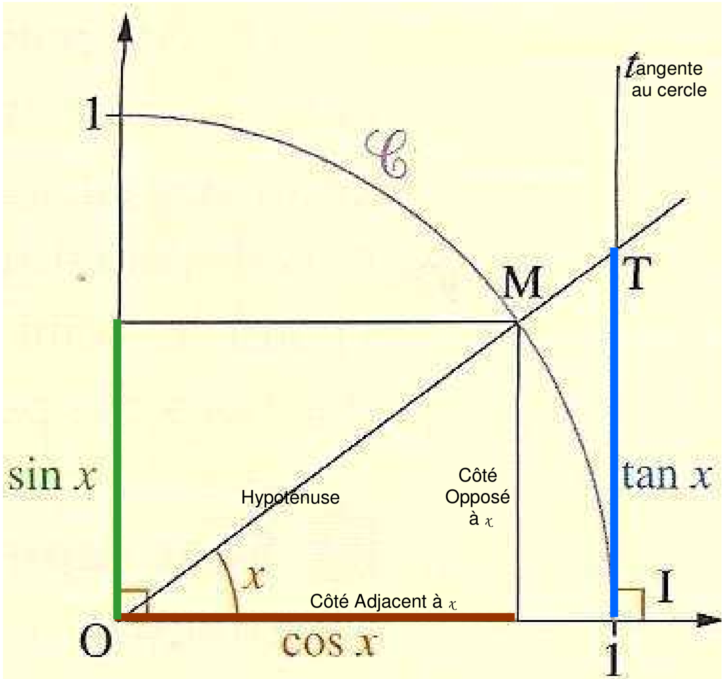
Cosinus Adjacent Hypoténuse car Cosinus = $\dfrac{\text{côté Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

Sinus Opposé Hypoténuse car Sinus = $\dfrac{\text{côté Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

Tangente Opposé Adjacent car Tangente = $\dfrac{\text{côté Opposé}}{\text{côté Adjacent}}$



DANS LE QUART DE CERCLE TRIGONOMETRIQUE …



En route vers la seconde…

$\tan^{-1} x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\text{côté adj}}{\text{côté opp}}$

Si $x + y = 90°$:

$\sin y = \cos x$ $\cos y = \sin x$ $\tan y = \dfrac{1}{\tan x}$ (si $\tan x \neq 0$)

PRINCIPALES PROPRIETES DES RELATIONS TRIGONOMETRIQUES …

x désigne la mesure d'un angle aigu.

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand des côtés, on a donc :

$0 \leq \cos x \leq 1$ $0 \leq \sin x \leq 1$ $\tan x \geq 0$

On a également :

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\text{côté opp}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{côté adj}}{\text{hyp}}} = \dfrac{\text{côté opp}}{\text{côté adj}} = \tan x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Calculons :

$\cos^2 x + \sin^2 x = \left(\dfrac{\text{côté adj}}{\text{hyp}}\right)^2 + \left(\dfrac{\text{côté opp}}{\text{hyp}}\right)^2$

$= \dfrac{\text{côté adj}^2}{\text{hyp}^2} + \dfrac{\text{côté opp}^2}{\text{hyp}^2} = \dfrac{\text{côté adj}^2 + \text{côté opp}^2}{\text{hyp}^2}$

Le triangle est rectangle, d'après le théorème de Pythagore : côté adj ² + côté opp ² = hypoténuse ²

On a donc : $\dfrac{\text{côté adj}^2 + \text{côté opp}^2}{\text{hyp}^2} = \dfrac{\text{hyp}^2}{\text{hyp}^2} = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Valeurs usuelles :

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Les calculs de cosinus, sinus et tangente se font à la calculatrice. ⚠ Vérifier qu'elle est en mode degré.

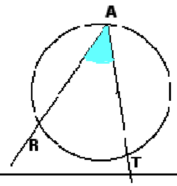
⚠ Si je connais l'angle, j'utilise les touches cos, sin, tan.
Si je cherche l'angle, j'utilise les touches arccos (ou $\cos^{-1}$ ou acs), arcsin (ou $\sin^{-1}$ ou asn), arctan (ou $\tan^{-1}$ ou atn).

ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

Angle inscrit dans un cercle

- son sommet est sur le cercle,
- ses côtés coupent le cercle.

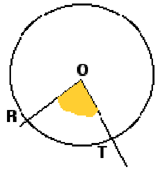
Ex : $\widehat{TAR}$ est l'angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{RT}$.



Angle au centre

- son sommet est le centre du cercle.

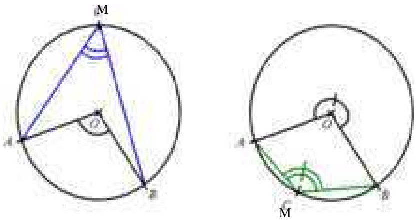
Ex : $\widehat{TOR}$ est l'angle au centre qui intercepte le petit arc $\overset{\frown}{RT}$.
$\underset{\smile}{TOR}$ est l'angle au centre qui intercepte le grand arc $\underset{\smile}{RT}$.



Angle inscrit et Angle au centre associés

On dit qu'ils sont associés s'ils interceptent le même arc.
(c'est-à-dire s'ils « regardent dans le même sens ».)

$\overset{\frown}{AB}$ est "dans $\widehat{AMB}$ " et "dans $\widehat{AOB}$ "
<=> $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ sont associés.



Remarque :

$\widehat{AIB} = \widehat{AKB} = ½\ \widehat{AOB}$

$\widehat{AJB} = ½\ \underset{\smile}{AOB}$

!!! $\widehat{AIB} \neq \widehat{AJB}$!!!

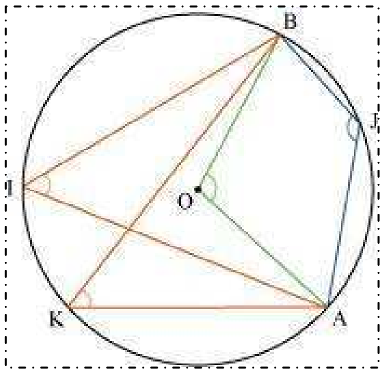
Ils n'interceptent pas le même arc AB.

$\widehat{AIB} + \widehat{AJB} = ½\widehat{AOB} + ½\ \underset{\smile}{AOB}$

$= ½\ (\widehat{AOB} + \underset{\smile}{AOB})$

$= ½ \times 360° = 180°$

$\widehat{AIB}$ et $\widehat{AJB}$ sont supplémentaires.

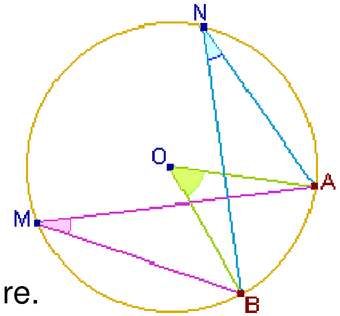


Théorème : $\widehat{AMB} = ½\ \widehat{AOB}$

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

Conséquence : $\widehat{AMB} = ½\ \widehat{AOB} = \widehat{ANB}$

Deux angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont même mesure.

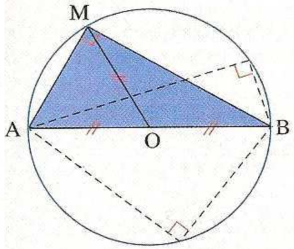


Cas particulier : $\widehat{AOB} = 180°$ <=> $\widehat{AMB} = ½\ \widehat{AOB} = 90°$

Triangle rectangle et cercle circonscrit

■ Si AMB est un triangle rectangle en M,
alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

■ Si un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB],
alors AMB est un triangle rectangle en M.



O est le milieu de l'hypoténuse [AB].
OA = OB = OM

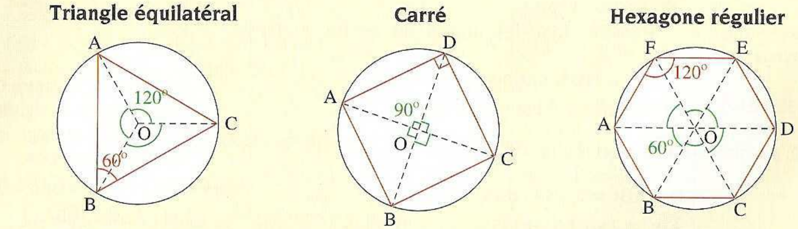
Exemple d'application : Polygones réguliers

Un polygone régulier à n côtés (tous les côtés et tous les angles ont même mesure) s'inscrit dans un cercle circonscrit. Son centre O s'appelle le centre du polygone.

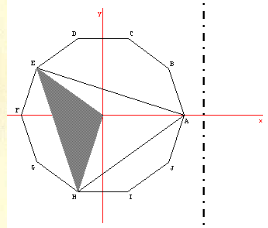
A et B, deux sommets consécutifs, forment donc un angle au centre de mesure $\frac{360°}{n}$.

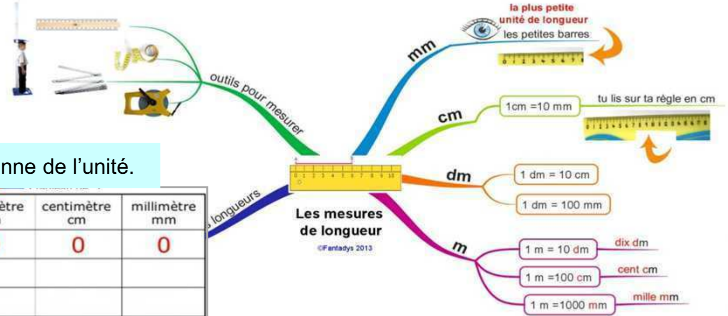
On peut donc calculer ainsi la mesure des angles du polygone.
La rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOB}$ donne le même polygone.

EXEMPLES : polygones réguliers à 3, 4 ou 6 côtés.



$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120°$ | $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = 90°$ | $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = ... = 60°$



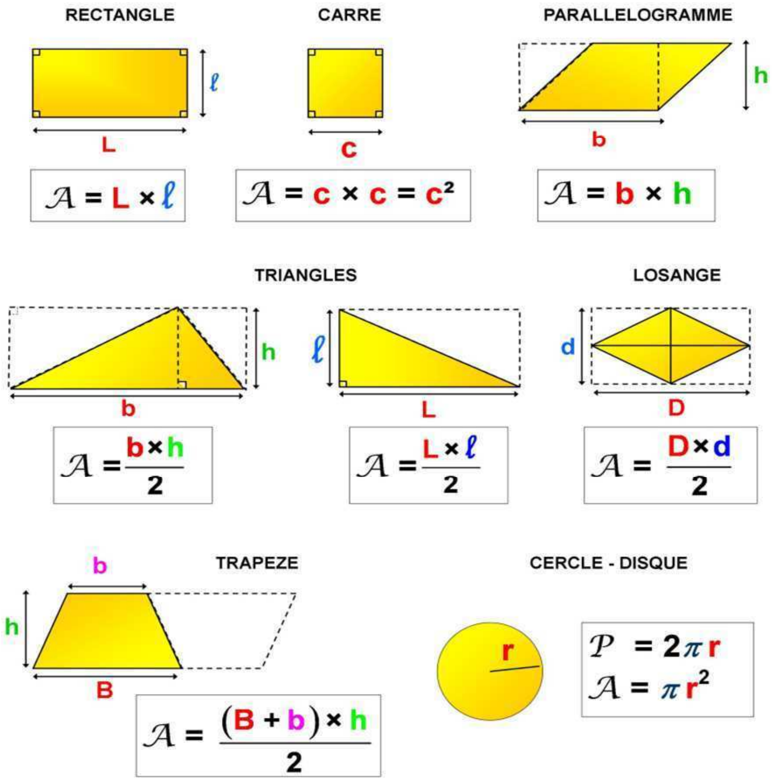


Je place toujours le chiffre des unités dans la colonne de l'unité.

	kilomètre km	hectomètre hm	décamètre dam	mètre m	décimètre dm	centimètre cm	millimètre mm
D 86 15 KM				1	0	0	0
	kilogramme kg	hectogramme hg	décagramme dag	gramme g	décigramme dg	centigramme cg	milligramme mg
KG	1	0	0	0			
		hectolitre hL	décalitre daL	litre L	décilitre dL	centilitre cL	millilitre mL
				1	0	0	

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

AIRES



RECTANGLE: $\mathcal{A} = L \times \ell$

CARRE: $\mathcal{A} = c \times c = c^2$

PARALLELOGRAMME: $\mathcal{A} = b \times h$

TRIANGLES: $\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$ $\quad \mathcal{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

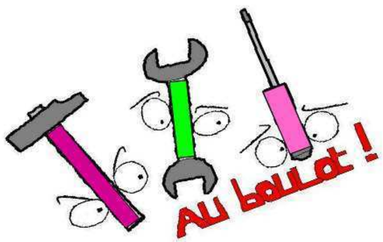
LOSANGE: $\mathcal{A} = \dfrac{D \times d}{2}$

TRAPEZE: $\mathcal{A} = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$

CERCLE - DISQUE: $\mathcal{P} = 2\pi r$ $\quad \mathcal{A} = \pi r^2$

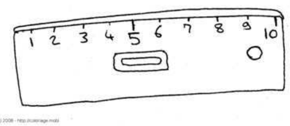
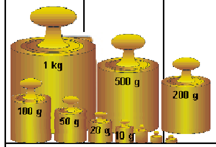
Géométrie

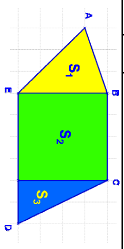
Longueurs
Surfaces

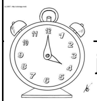


MESURES : UNITES ET CONVERTIONS

Unités de Longueur, Masse, Capacité, Aire et Temps

MULTIPLES DE L'UNITE							UNITE	SOUS-MULTIPLES DE L'UNITE		
				km	hm	dam	mètre	dm	cm	mm
										
	t	q	▪	kg	hg	dag	gramme	dg	cg	mg
										
					hL	daL	Litre	dL	cL	mL
										

	km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
		ha	are	ca			

	Multiples de l'unité		UNITE	Sous-multiples de l'unité		
jour	heure	minute	Seconde	dixième de seconde	centième de seconde	millième de seconde
1j = 24 h	1h = 60min	1min = 60s	S	0,1 s	0,01 s	0,001 s

1 an = 12 mois = 365 jours ¼

⚠ 1,25 h = 75 min ≠ 1h 25min ⚠

POUR CHAQUE UNITE…

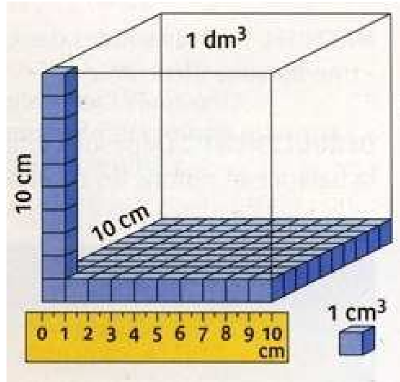
Les multiples sont : le kilo…, l'hecto…, le déca… .
Les sous-multiples sont : le déci…, le centi…, le milli…

Unités de Volume

Les unités légales des volumes sont celles du système métrique, c'est à dire celles qui utilisent le mètre pour référence.
L'unité de volume légale est le mètre cube (m^3)
(c'est-à-dire le volume d'un cube de 1 m sur 1 m sur 1 m).

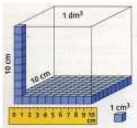
Nous avons représenté les cm^3 qui se trouvent à l'intérieur d' 1 dm^3.

1 dm^3 = 1 000 cm^3



On peut utiliser
un tableau de conversions.
On le remplira donc en mettant
3 chiffres par colonne.

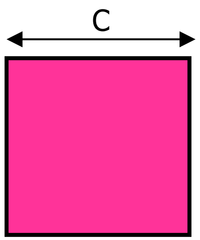
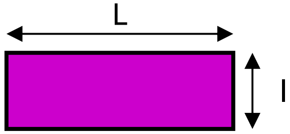
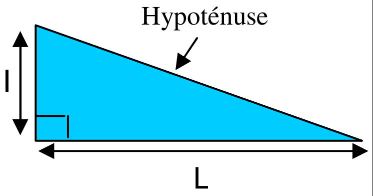
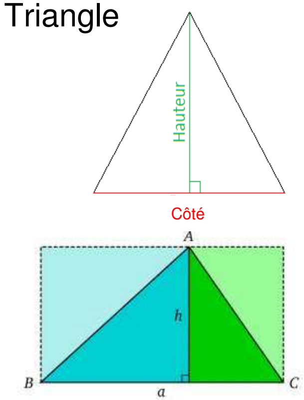
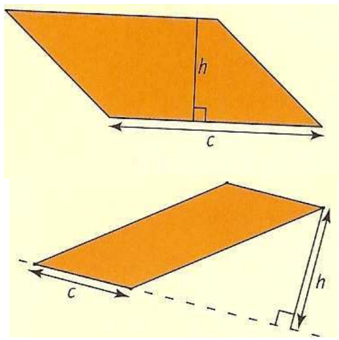
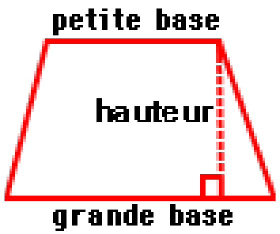
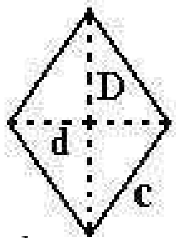
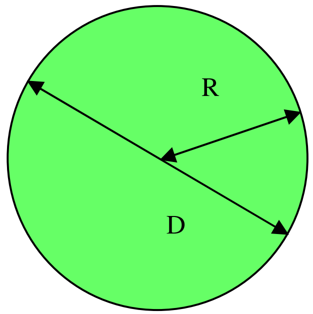
Pour passer d'une unité de volume à une unité de capacité.
On remplit 1 dm^3 avec de l'eau. On constate que 1 dm^3 = 1 L



km^3	hm^3	dam^3	m^3	**dm^3**			cm^3			mm^3
				hL	daL	**L**	dL	cL	mL	
			3 8	4	5	6	0	0	0	

Ex : 38,456 m^3 = 3 845,6 daL = 38 456 000 cm^3
On utilise rarement les multiples du m^3 dans la vie courante.
Par exemple, il y a 1,4 milliards de km^3 d'eau sur terre.

FORMUL' AIRES ET PERIMETRES

Carré	Rectangle	Triangle rectangle	Triangle
			
Périmètre = 4 × Côté	Périmètre = 2 × (Longueur + largeur)	Périmètre = Hypoténuse + Longueur + largeur	Périmètre = Côté 1 + Côté 2 + Côté 3
Aire = Côté × Côté	Aire = Longueur × largeur	Aire = $\frac{\text{Longueur} \times \text{largeur}}{2}$	Aire = $\frac{\text{Côté} \times \text{Hauteur}}{2}$
Parallélogramme	**Trapèze**	**Losange**	**Cercle**
		 $\frac{D \times d}{2}$	
Périmètre = 2 x (Côté 1 + Côté 2)	Périmètre = Côté 1 + Côté 2 + Côté 3 + Côté 4	Périmètre = 4 x Côté	Périmètre = 2 × π × Rayon Périmètre = π × Diamètre avec π ≈ 3,14
Aire = Côté x Hauteur Correspondante	Aire = $\frac{\text{(Petite Base + Grande Base) x Hauteur}}{2}$	Aire = $\frac{\text{Petite Diagonale x Grande Diagonale}}{2}$	Aire = π × Rayon × Rayon ou Aire = π × Rayon^2 avec π ≈ 3,14

Périmètre d'une figure fermée :
longueur de son contour = somme des longueurs de tous ses côtés

Aire d'une figure :
mesure de sa surface

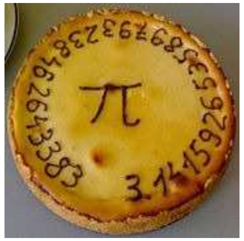
Volume d'un solide :
mesure de son espace intérieur

!!! Attention !!!

Les calculs se font dans une unité donnée.

Les longueurs doivent donc toutes être exprimées dans la même unité.

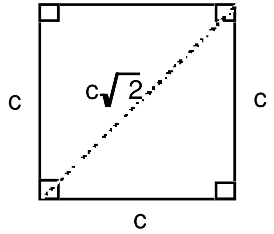
NB: π ≈ 3,141592 est représenté par une lettre grecque qui se prononce 'pi'.
π est un nombre particulier avec un nombre de décimales infini.



GEOMETRIE ET RACINES CARREES

Quelques calculs de longueurs importants en géométrie…

DIAGONALE DU CARRE

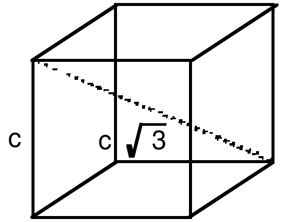


$$\boxed{d = c\sqrt{2}}$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \text{diagonale}^2 &= c^2 + c^2 \\ &= 2c^2 \\ \text{diagonale} &= \sqrt{2c^2} \\ &= \sqrt{2}\,\sqrt{c^2} \\ &= c\sqrt{2} \end{aligned}$$

DIAGONALE INTERIEURE DU CUBE

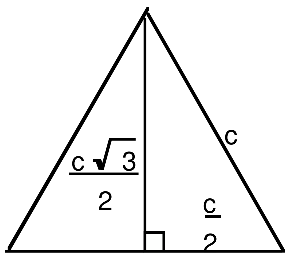


$$\boxed{D = c\sqrt{3}}$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \text{diagonale}^2 &= c^2 + (c\sqrt{2})^2 \\ &= c^2 + 2c^2 = 3c^2 \\ \text{diagonale} &= \sqrt{3c^2} \\ &= \sqrt{3}\,\sqrt{c^2} \\ &= c\sqrt{3} \end{aligned}$$

HAUTEUR DU TRIANGLE EQUILATERAL



$$\boxed{h = \frac{c\sqrt{3}}{2}}$$

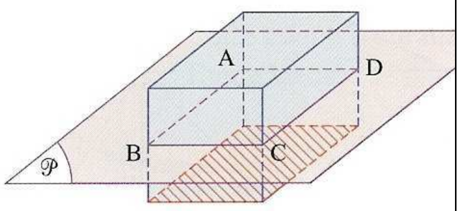
D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \text{hauteur}^2 + \frac{c}{2}^2 &= c^2 \\ \text{hauteur}^2 + \frac{c^2}{4} &= c^2 \\ \text{hauteur}^2 &= c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4} \\ \text{hauteur} &= \sqrt{\frac{3c^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{c^2}\,\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \end{aligned}$$

SECTIONS PAR UN PLAN

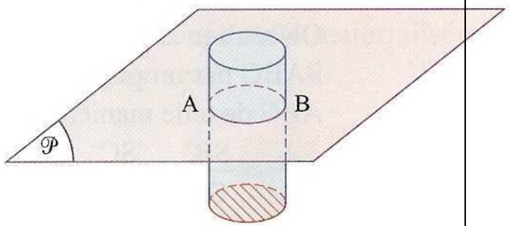
Section : Surface plane obtenue en coupant un solide par un plan. (les points appartiennent au solide et au plan.)

Le parallélépipède rectangle

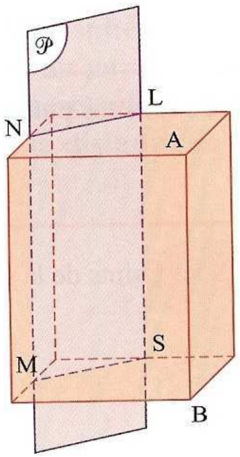


La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à la base est délimitée par un rectangle.

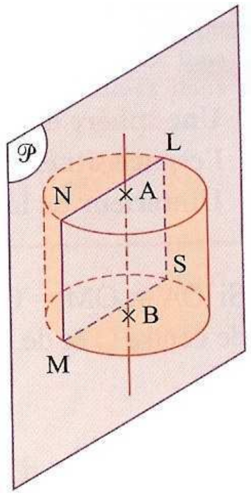
Le cylindre



La section d'un cylindre par un plan parallèle à la base (et perpendiculaire à l'axe) est délimitée par un cercle (disque identique à la base).

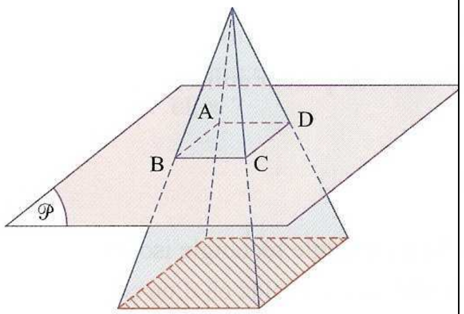


La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête est délimitée par un rectangle.

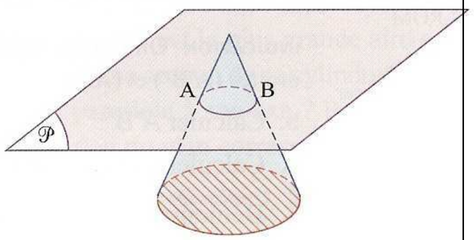


La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe est délimitée par un rectangle.

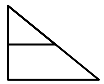
La pyramide



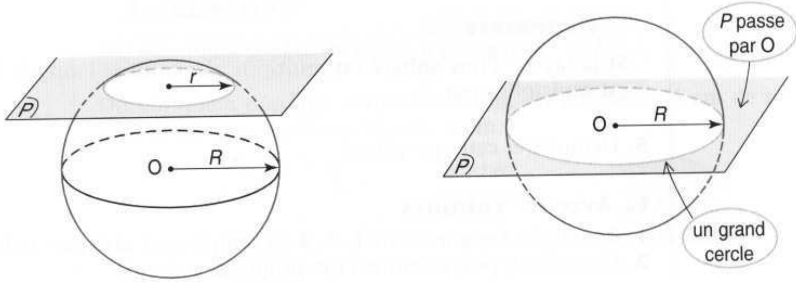
Le cône



La section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base est de même nature que la base polygonale ou circulaire.

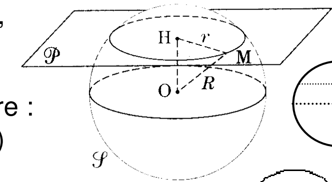


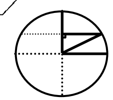
C'est une réduction de la base, on utilise le Théorème de Thalès pour calculer les dimensions.

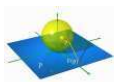


La section d'une sphère par un plan est un cercle.

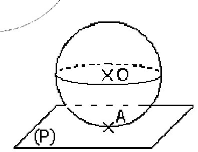
* S'il passe par O, son rayon est R, la section est un grand cercle.
* Sinon, r < R. Pour calculer r, on utilise le Théorème de Pythagore :
$OH^2 + r^2 = R^2$, donc $r = \sqrt{(R^2 - OH^2)}$



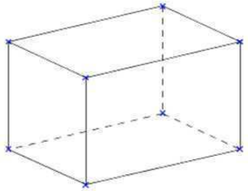


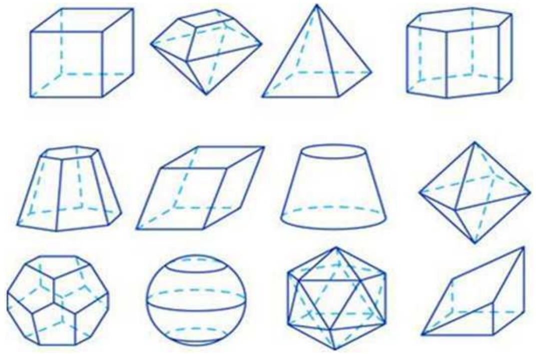


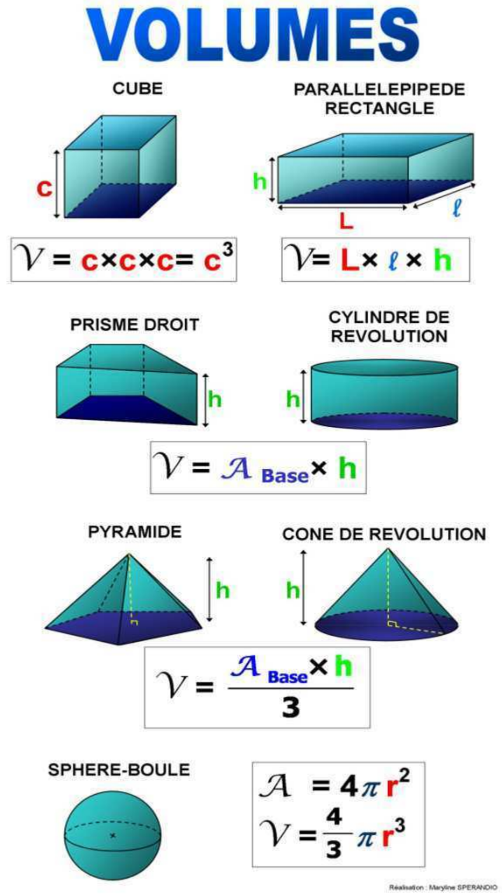
Cas particuliers :
* Si OH = R, le plan est tangent à la sphère le plan et la sphère ont un seul point commun, A.
* Si OH > R, le plan ne coupe pas la sphère.



Dessiner une perspective cavalière

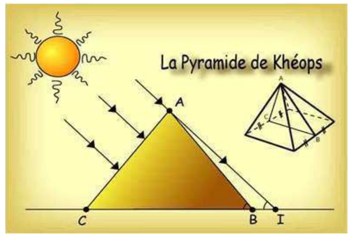






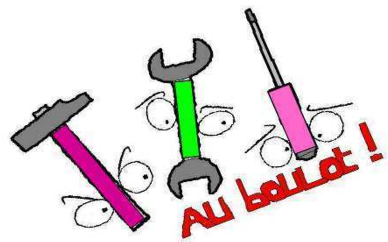
km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kℓ	hℓ	daℓ	ℓ	dℓ	cℓ	mℓ			
											2	5	7	0						

$$2{,}57\ m^3 = 2\ 570\ dm^3 = 2\ 570\ \ell$$



Géométrie

Espace

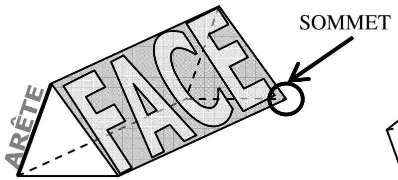


SOLIDES ET PATRONS

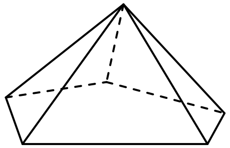
Solide et Volume

Solide : Un solide est un objet de l'espace en 3 dimensions (« en relief »).

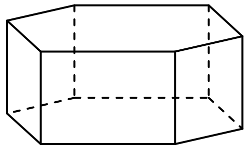
Nous allons étudier les polyèdres, conçus par un assemblage de polygones.



5 faces et 6 sommets
9 arêtes (dont 3 cachées)



6 faces et 6 sommets
10 arêtes (dont 3 cachées)



8 faces et 12 sommets
18 arêtes (dont 5 cachées)

Un solide est impossible à dessiner sur une feuille (surface plane en deux dimensions). On le représente sur un plan en utilisant le dessin en perspective.

C'est une perspective cavalière (perspective particulière) si :

- toutes les arêtes parallèles et de même mesure sont représentées par des segments parallèles et de même mesure,
- les faces avant et arrière représentent la réalité,
- les autres faces sont déformées par la perspective,
- les arêtes cachées sont représentées par des pointillés.

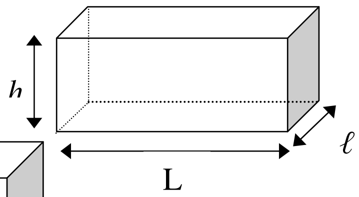
Volume : Le volume d'un solide est la mesure de son espace intérieur.

On peut calculer les volumes de certains solides à l'aide de formules :

Ex :Le volume d'un pavé droit se calcule en multipliant les trois dimensions de l'objet.
!!! Attention, les dimensions doivent être exprimées dans la même unité de longueur. !!!

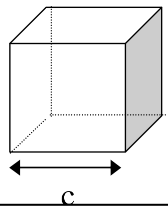
Pavé droit

$\boxed{\textbf{V} \text{ (volume)} = \textbf{L} \text{ (longueur)} \times \textbf{l} \text{ (largeur)} \times \textbf{h} \text{ (hauteur)}}$



Cube

$\boxed{\textbf{V} \text{ (volume)} = \textbf{C} \text{ (côté)} \times \textbf{C} \text{ (côté)} \times \textbf{C} \text{ (côté)}}$



Solide particulier : le parallélépipède rectangle

Parallélépipède rectangle (ou pavé droit)
Un parallélépipède rectangle est un solide dont toutes les faces sont des rectangles.

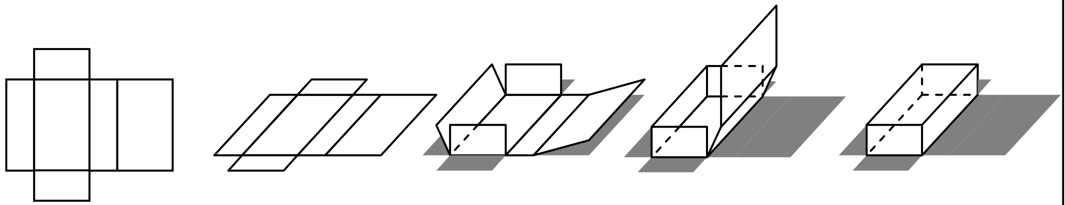
Construction

Un parallélépipède rectangle a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes.

Cas particulier : Cube
Un parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés est un cube.

Patron

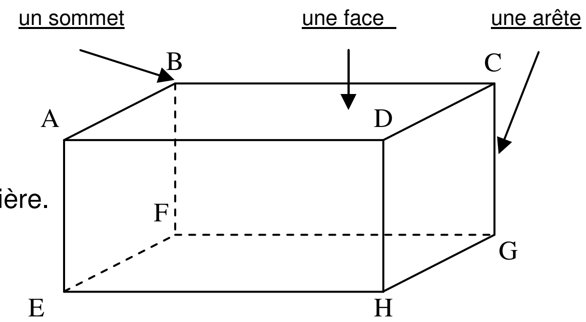
Le patron est un dessin en un seul morceau qui permet de construire un solide.



1. Le patron du pavé droit — *2.* On découpe (vue en perspective) — *3.* On plie — *4.* On colle les arêtes — *5.* On obtient le pavé droit.

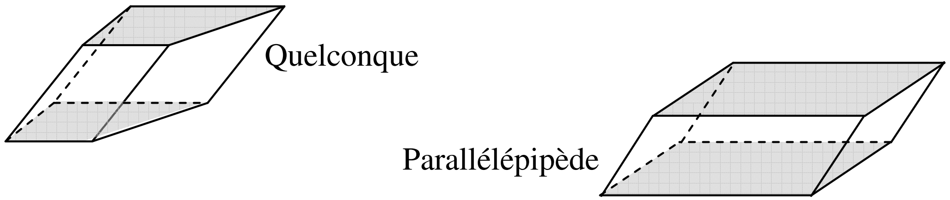
Perspective cavalière

ABCDEFGH est un pavé droit représenté en perspective cavalière.

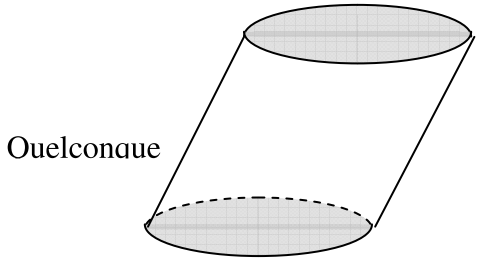


PRISMES ET CYLINDRES

PRISMES

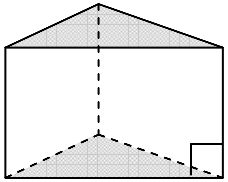


CYLINDRES

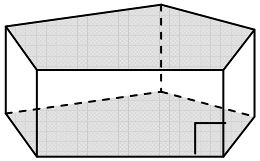


Prismes droits

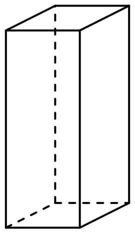
Solide dont les bases sont des polygones superposables (triangle, rectangle, parallélogramme, octogone, quelconque …) et les autres faces sont des rectangles.



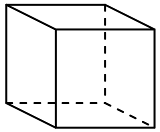
A base triangulaire.



Quelconque



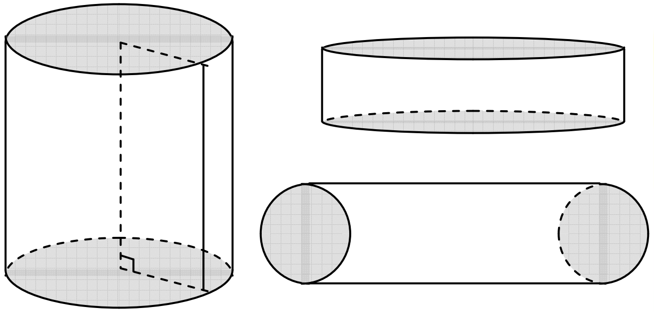
Parallélépipède rectangle ou pavé droit
V = L x l x h

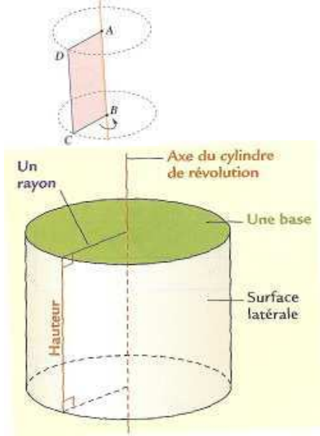


Cube
$V = c^3$
= c x c x c

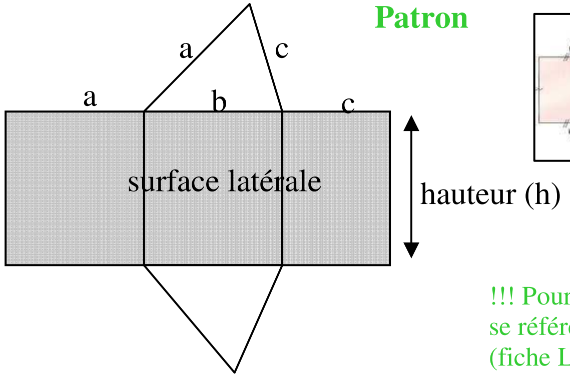
Cylindres de révolution

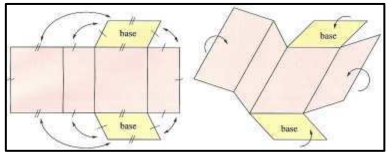
Solide décrit par un rectangle qui tourne autour de l'un de ses côtés.
Les deux **bases** sont des **disques** de même rayon.





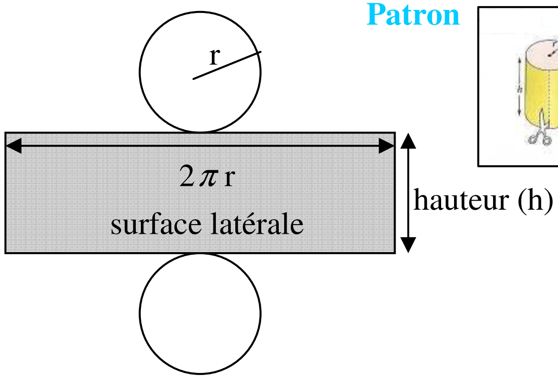
Patron

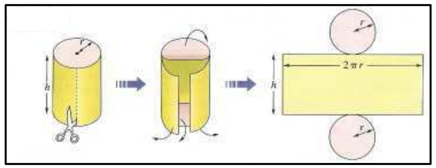




!!! Pour l'aire et le périmètre des bases, se référer au Formul'Aires. !!!
(fiche Longueurs et Surfaces 2)

Patron





!!! Rappel !!!
Périmètre d'un cercle = $2\pi r$
Aire d'un cercle = πr^2

Aire latérale = périmètre de la base x hauteur = (a + b + c) x h

Aire totale = aire latérale + aire des bases

Volume = aire de la base x hauteur

Aire latérale = périmètre de la base x hauteur = $2\pi r h$

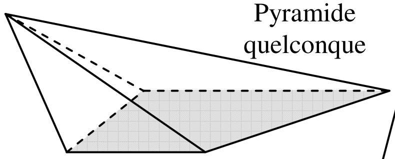
Aire totale = aire latérale + aire des bases = $2\pi r h + 2\pi r^2$

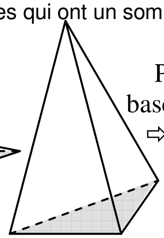
Volume = aire de la base x hauteur = $\pi r^2 h$

PYRAMIDES ET CONES

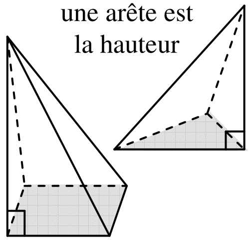
PYRAMIDES

Solide dont la base est un polygone à n côtés
(triangle, rectangle, parallélogramme, octogone, quelconque …)
et les n faces latérales sont des triangles qui ont un sommet commun S.


Pyramide quelconque

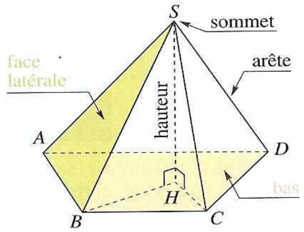

Pyramide à base triangulaire ⇨ Tétraèdre

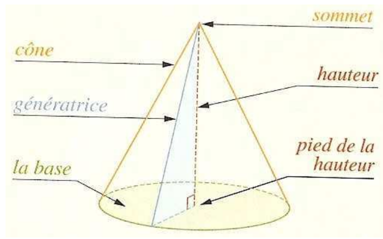
Pyramides dont une arête est la hauteur

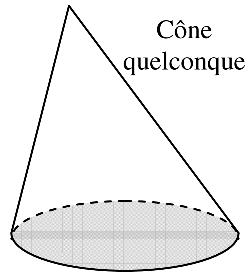


CONES

VOCABULAIRE :
Hauteur : droite passant par le sommet et perpendiculaire à la base.

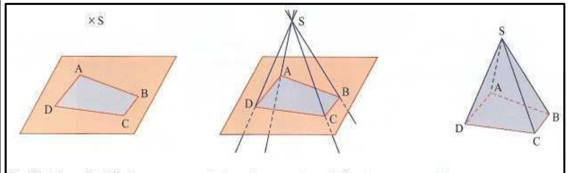


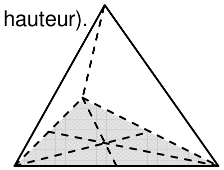


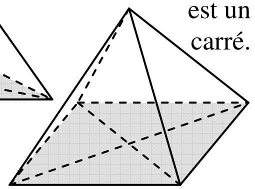

Cône quelconque

Pyramides régulières

Pyramide dont la base est un polygone régulier de centre O
et le sommet est sur la perpendiculaire à la base en O (sur la hauteur).
Les faces latérales sont des triangles isocèles identiques.

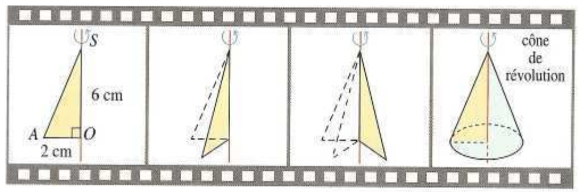

On joint le point S à chaque sommet du polygone et on obtient une pyramide.


La base est un triangle équilatéral.

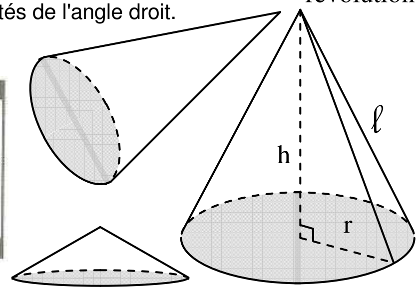

La base est un carré.

Cônes de révolution

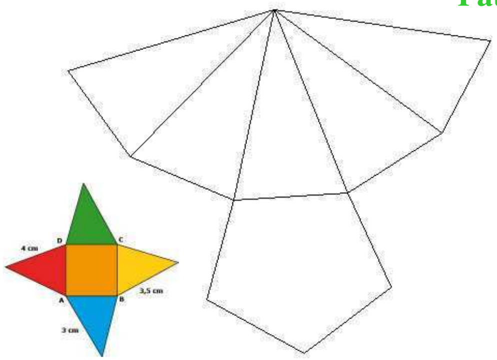
Solide décrit par un triangle qui tourne autour de l'un des côtés de l'angle droit.
La **base** est un **disque**.

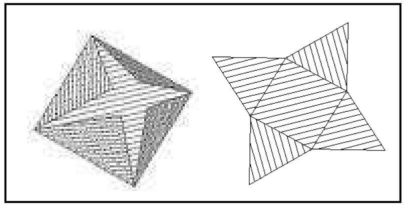


Cônes de révolution



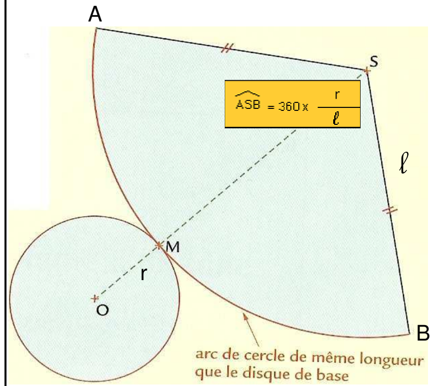
Patron

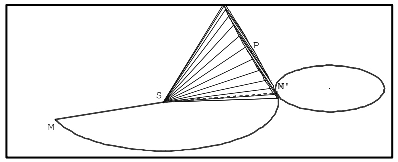




!!! Pour l'aire et le périmètre de la base, se référer au Formul'Aires. !!!
(fiche Longueurs et Surfaces 2)

Patron





!!! Rappel !!! Aire d'un disque = πr^2
Périmètre d'un cercle = $2\pi r$

Pour déterminer l'aire de la surface conique,
on détermine d'abord l'aire totale du disque : $\pi \ell^2$,
et on la multiplie par la proportion $\frac{r}{\ell}$: $\pi \ell^2 \times \frac{r}{\ell} = \pi r \ell$

Aire latérale = aire des n faces latérales

Aire totale = aire latérale + aire de la base

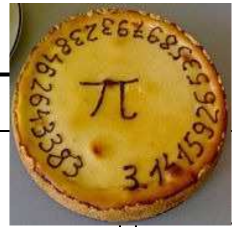
Volume = $\frac{1}{3}$ aire de la base x hauteur

Aire de la surface conique = $\pi r \ell$ (on la trouve par la proportionnalité)

Aire totale = aire de la surface conique + aire de la base = $\pi r \ell + \pi r^2$

Volume = $\frac{1}{3}$ aire de la base x hauteur = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

FORMUL'VOLUMES

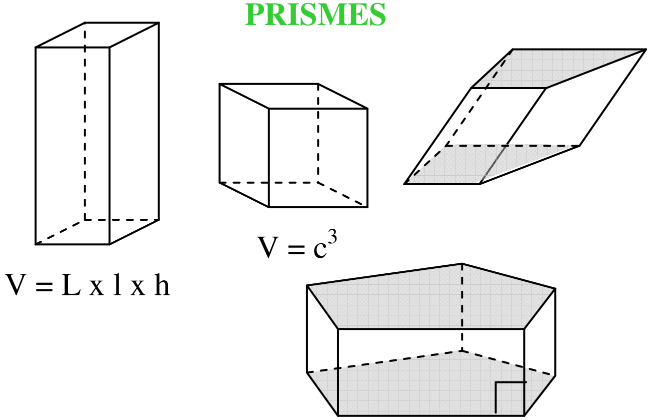


SPHERES ET BOULES

BASE POLYGONALE

LES DROITS $V = B \times H$

PRISMES



V = L x l x h

V = c³

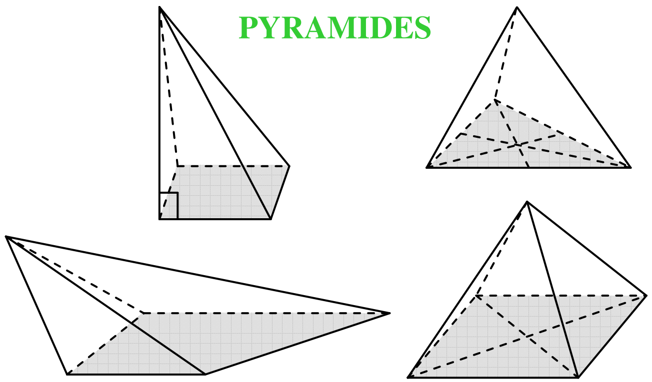
Aire latérale = périmètre de la base x hauteur

Aire totale = aire latérale + aire des bases

Volume = aire de la base x hauteur

LES POINTUS $V = \frac{1}{3} B \times H$

PYRAMIDES



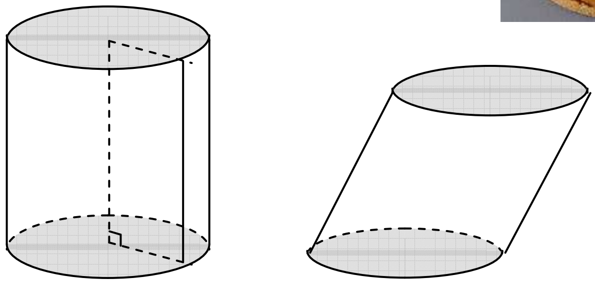
Aire latérale = aire des n faces latérales

Aire totale = aire latérale + aire de la base

Volume = $\frac{1}{3}$ aire de la base x hauteur

BASE CIRCULAIRE

CYLINDRES



Aire latérale = périmètre de la base x hauteur

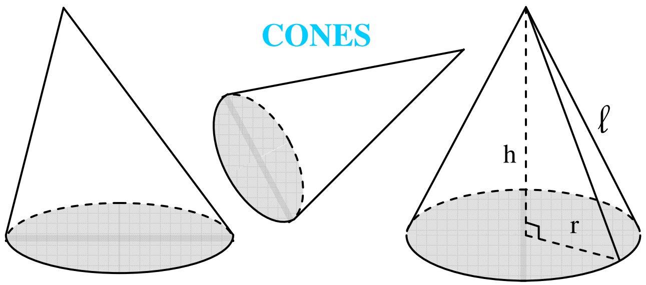
= $2 \pi r \times h$

Aire totale = aire latérale + aire des bases

= $2 \pi r \times h + 2 \times \pi r^2$

Volume = aire de la base x hauteur = $\pi r^2 h$

CONES



Aire de la surface conique = $\pi r \ell$ (proportionnalité)

Aire totale = aire surface conique + aire base

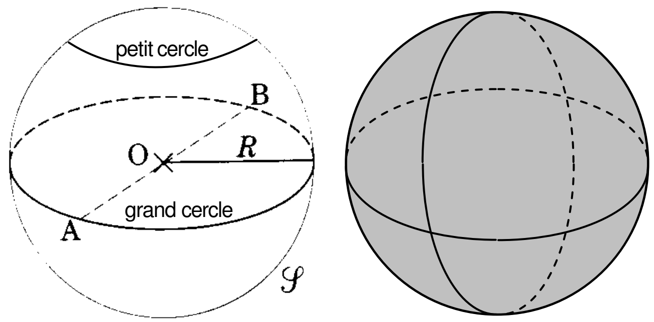
= $\pi r \ell + \pi r^2$

Volume = $\frac{1}{3}$ aire de la base x hauteur = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

SPHERES ET BOULES

Sphère	Boule
de centre O et de rayon R : Surface constituée de tous les points de l'espace dont la distance à O est égale à R. (ensemble des points M de l'espace tels que OM = R)	de centre O et de rayon R : Solide constitué de tous les points de l'espace dont la distance à O est inférieure ou égale à R. (ensemble des points M de l'espace tels que OM ≤ R)

La boule est pleine, la sphère est creuse.
La sphère est l'enveloppe de la boule.



Surface = $4 \pi r^2$

= 4 x surface d'un grand cercle

Volume = $\frac{4}{3} \pi r^3$

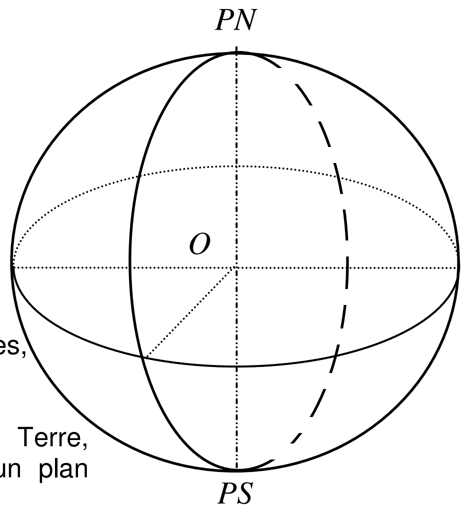
= $\frac{1}{3}$ x surface x rayon

Remarques

On dit que A et B sont diamétralement opposés.
Un grand cercle est un cercle de points dont le centre est celui de la sphère.
!!! On ne peut pas construire le patron d'une sphère. !!!

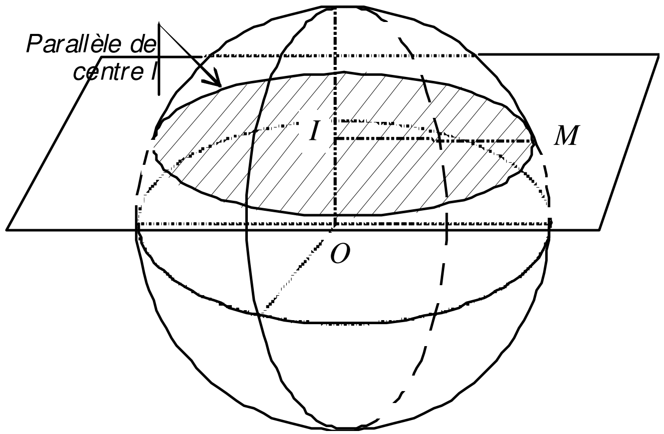
LA SPHERE TERRESTRE

La Terre est une sphère
(légèrement aplatie aux pôles)
dont le **rayon est arrondi à 6 400 km.**
Le segment formé par les deux pôles
est un diamètre de la Terre.



L'**équateur** est un grand cercle de la Terre.
Sa longueur se calcule donc par la formule :
$L = 2\pi R$, où R est le rayon de la Terre.
On obtient : $L \approx 2 \times \pi \times 6\,400 \approx$ **40 000 km**.

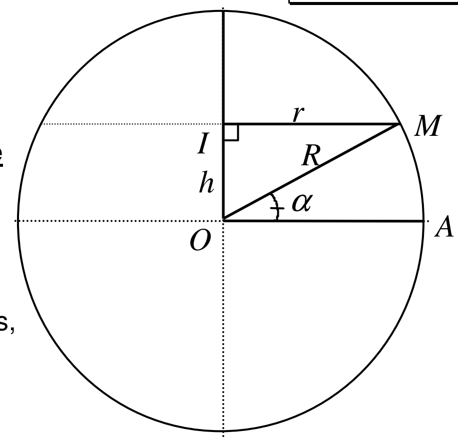
Tous les **méridiens** sont d'autres grands cercles, passant eux par les deux pôles,
et leur longueur est aussi d'environ 40 000 km.
Un **parallèle** est un petit disque de la Terre, déterminé par la section de la Terre par un plan parallèle au plan de l'équateur.



La longueur d'un parallèle dépend de son rayon.
Ce rayon dépend de la longueur séparant le centre du parallèle du centre de la Terre. Il peut se calculer grâce au théorème de Pythagore.

Mais les parallèles ont été repérés d'une autre manière.
C'est l'angle formé par un point de l'équateur, le centre de la Terre
et un point du parallèle qui va permettre de déterminer le parallèle.
Cet angle porte le nom de **latitude**.

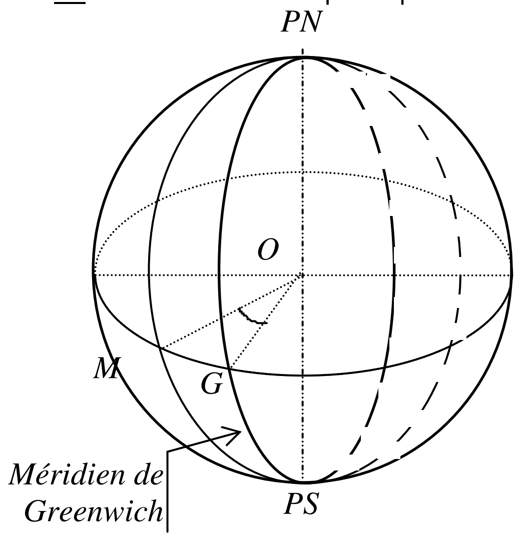
Plaçons-nous dans le plan
contenant les points O, I et M.
M est un point du parallèle de centre I.
La latitude de ce parallèle est l'angle α, formé par les points A, O et M.



Les angles $\widehat{IMO}$ et $\widehat{MOA}$
sont alternes - internes.
Les droites (IM) et (AO) étant parallèles,
les angles sont égaux.
Donc dans le triangle IMO, on utilise
le cosinus et on obtient **$r = R \times \cos \alpha$.**

La latitude d'un parallèle est un angle compris entre 0° et 90°.
On ajoute une indication de sens pour dire si le parallèle est
entre l'équateur et le pôle Nord, ou bien entre l'équateur et le pôle Sud.

Ex : On dira donc d'un point qu'il a une latitude de 42°N ou de 38°S.



Coordonnées géographiques :
Pour repérer un point sur la Terre,
on le situe à la fois sur un méridien
et sur un parallèle.

Chaque méridien est repéré
par rapport à un méridien de référence:
le méridien de Greenwich

M est le point d'un méridien
situé sur l'équateur,
et G le point du méridien de Greenwich
situé sur l'équateur.
La longitude du méridien passant par M est l'angle $\widehat{GOM}$.

La longitude d'un méridien est un angle compris entre 0° et 180°
On ajoute une indication de sens pour dire si le méridien est
à l'Est ou à l'Ouest du méridien de Greenwich.

Ex : On dira d'un point qu'il a une longitude de 42°E ou de 138°O.